ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 16 August 1936 Heft 4

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Strömung um einen ebenen Tragflügel mit Querruder.

Von *C. Schmieden* in Rostock[1]).

Anläßlich theoretischer Untersuchungen des Flugtechnischen Instituts der Technischen Hochschule Berlin ergab sich das Problem der konformen Abbildung des Außenbereichs eines gewissen Flügelprofils auf eine Halbebene. Dieser Aufgabe hat sich in dankenswerter Weise Herr Prof. C. Schmieden, Universität Rostock, unterzogen; dabei ergab sich außerdem das Strömungspotential für den unendlichen Parallelstrom um den ruhenden Flügel und die Kraftwirkung der Strömung auf den Flügel. Wir bringen hier die Entwicklungen von C. Schmieden im wesentlichen wörtlich wieder (nach einer brieflichen Mitteilung).

Wir idealisieren das Flügelprofil des ebenen Tragflügels mit Querruder durch zwei gegeneinander abgeknickte Strecken BE und ED (Abb. 1). Wir nennen die Tiefe des Querruders $\overline{ED} = t_R$, die des Flügels ohne Querruder $\overline{BE} = t_F$ und die Gesamttiefe des Tragflügels $t_g = t_F + t_R$; den Ausdruck $\frac{t_R}{t_F + t_R}$ setzen wir gleich λ, wobei $0 < \lambda < 1$; γ sei der Ruderausschlag (zunächst $\gamma > 0$). Das Profil des Tragflügels ist durch den Streckenzug $BCDE$ festgelegt.

I. Abbildung der z-Ebene auf die obere t-Ebene (Abbildung des Streckenzuges $BCDE$ der Abb. 2 auf die reelle Achse der t-Ebene von Abb. 4). Es ist bekannt, daß man die ebene Strömung eines unendlichen Parallelstromes um ein beliebig gestaltetes Flügelprofil angeben kann, wenn die konforme Abbildung des von dem Profil bestimmten Außenbereichs der z-Ebene auf das Äußere eines Kreises bzw. auf eine Halbebene gegeben ist. Hier wird in gewisser Weise die Sache umgekehrt, indem von einer speziellen Strömung um das Profil auf die konforme Abbildung geschlossen wird.

Der Tragflügel werde mit der Anströmgeschwindigkeit V_∞, parallel zur x-Achse, von links her angeströmt. Dabei möge der Flügel den Anstellwinkel α besitzen (Abb. 1). Die Zirkulation um den Flügel wird in der üblichen Weise durch die Forderung „glatter Abfluß an der Hinterkante" festgelegt.

[1]) Für den Druck fertiggestellt von Dr. G. Ellenberger, Flugtechnisches Institut der Technischen Hochschule Berlin (Prof. Dr.-Ing. H. Wagner).

Im allgemeinen wird der vordere Staupunkt A irgendwo auf der Unterseite bzw. auf der Oberseite des Tragflügels liegen, so daß die Vorderkante mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt wird. Man sieht aber sofort, daß bei jedem fest gegebenen λ und γ ein gewisses α_0 existieren muß, für welches der vordere Staupunkt in die Vorderkante B hineinfällt (Abb. 2). Da in dieser Lage die Geschwindigkeit auf der Unterseite durchschnittlich größer sein muß als auf der Oberseite, muß sich für diesen Fall ein Abtrieb ergeben. Von dieser Lage, wobei α_0 natürlich eine Funktion von λ und γ ist, gehen wir aus: Betrachten wir die Geschwindigkeit entlang des Tragflügels, so ist sie überall endlich, nur an der konvexen Ecke E wird sie unendlich (an der konkaven Ecke C wird sie Null). Durch die Funktion

$$\zeta = \ln\left(V_\infty \frac{dz}{dw}\right) = \ln\frac{V_\infty}{V} + i\cdot\Theta$$

(V Betrag, Θ Richtung der wahren Geschwindigkeit)

wird somit in diesem Falle die z-Ebene abgebildet auf einen Parallelstreifen mit dem Nullpunkt im Innern. Der obere Rand hat die Gleichung $\Theta = \gamma - \alpha_0$, der untere $\Theta = -\alpha_0$. (Es ist klar, daß für den betrachteten Strömungszustand $\gamma > \alpha_0$ sein muß — Abb. 3 —.)

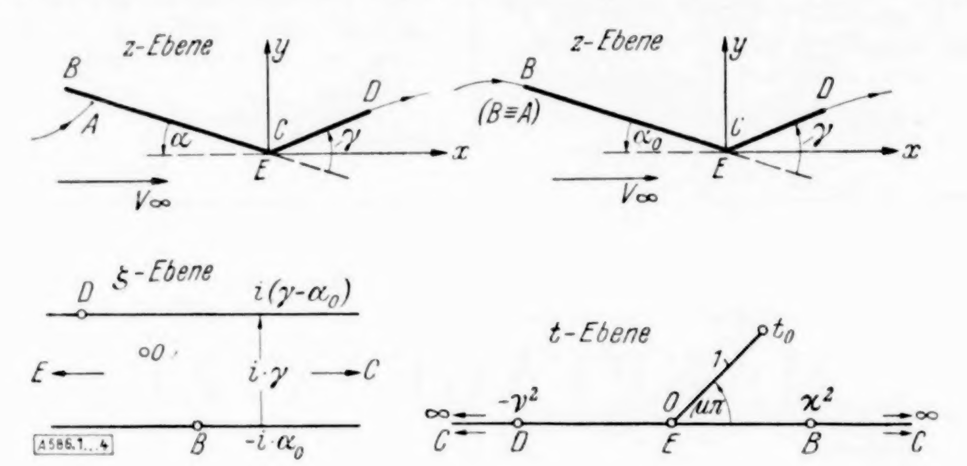


Abb. 1 bis 4. Der Zusammenhang zwischen der z-, ζ- und t-Ebene.

Bilden wir den Streifen so auf die obere t-Halbebene ab, wie in Abb. 4 angegeben, so erhalten wir

$$\zeta = \ln\left(V_\infty \frac{dz}{dw}\right) = \frac{\gamma}{\pi}\ln t - i\,\alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dem Unendlichfernen der z-Ebene entspricht $\zeta = 0$, also

$$t_0 = e^{i\frac{\alpha_0}{\gamma}\pi} = e^{i\mu\pi}; \quad 0 < \mu < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Im Punkte t_0 haben wir jetzt einen Dipol und einen Wirbel anzubringen und das komplexe Potential so zu bestimmen, daß die reelle t-Achse Stromlinie wird und die Staupunkte nach $t = \varkappa^2$ und $t = -\nu^2$ fallen. Die erste Bedingung erfüllt der folgende Ansatz:

$$w = i\,b\left\{\frac{e^{-i\beta}}{t - e^{-i\mu\pi}} - \frac{e^{i\beta}}{t - e^{i\mu\pi}} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{t - e^{i\mu\pi}}{t - e^{-i\mu\pi}}\right\} \begin{pmatrix}b \text{ reelle freie}\\ \text{Konstante}\end{pmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Eine weitere Bedingung, der wir die Konstanten zu unterwerfen haben, ist die Schließungsbedingung: Integrieren wir $\frac{dz}{dt}$ in der t-Ebene entlang der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$, so müssen wir in der z-Ebene an den Ausgangspunkt zurückkommen, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{dt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{dw}\frac{dw}{dt}\,dt = \frac{1}{V_\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\zeta}\frac{dw}{dt}\,dt = 0\,.$$

Da sich für $t \to \infty$ der Integrand verhält wie $t^{\frac{\gamma}{\pi}-2}$, können wir das Integral über den Halbkreis mit unendlich großem Radius in der oberen Halbebene hinzufügen, ohne den Integralwert zu verändern. Es muß also das folgende Konturintegral verschwinden:

$$\frac{e^{-i\alpha_0}\,i\,b}{V_\infty}\oint t^{\frac{\gamma}{\pi}}\left\{\frac{e^{i\beta}}{(t - e^{i\mu\pi})^2} - \frac{e^{-i\beta}}{(t - e^{-i\mu\pi})^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{1}{t - e^{-i\mu\pi}}\right)\right\}dt\,.$$

Kontur: ⌓

Auf dem Rande liegt keine Singularität, die einzige Singularität des Integranden im Innern der Kontur liegt bei $t = t_0$. Also muß das Residuum bei t_0 verschwinden. Wegen

$$t^{\frac{\gamma}{\pi}} = \left(e^{i\mu\pi} + t - e^{i\mu\pi}\right)^{\frac{\gamma}{\pi}} = e^{i\alpha_0}\left\{1 + \frac{\gamma}{\pi}\, e^{-i\mu\pi}\left(t - e^{i\mu\pi}\right) + \dots\right\}$$

folgt

$$\mathfrak{Res}\left(e^{i\mu\pi}\right) = e^{i(\beta - \mu\pi)}\,\frac{\gamma}{\pi} + \frac{\Gamma}{2\pi} = 0,$$

oder

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{\gamma}{\pi}; \quad \beta = \mu\pi + \pi \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4).$$

Es ist $\Gamma > 0$ für $\gamma > 0$, d. h. wir erhalten tatsächlich einen Abtrieb, wie oben behauptet wurde. Wir erhalten jetzt

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= i\,b\left\{\frac{e^{-i\mu\pi}}{(t - e^{-i\mu\pi})^2} - \frac{e^{i\mu\pi}}{(t - e^{i\mu\pi})^2} + \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{1}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{1}{t - e^{-i\mu\pi}}\right)\right\} \\ &= 2\,b\cdot\sin\mu\pi\,\frac{t^2\left(1 - \frac{\gamma}{\pi}\right) + 2\,\frac{\gamma}{\pi}\,t\cos\mu\pi - \left(1 + \frac{\gamma}{\pi}\right)}{(t^2 - 2\,t\cos\mu\pi + 1)^2} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (5).$$

Die Staupunkte fallen in die Wurzeln von

$$t^2 + 2\,\frac{\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi}{1 - \frac{\gamma}{\pi}}\,t - \frac{1 + \frac{\gamma}{\pi}}{1 - \frac{\gamma}{\pi}} = 0,$$

also wird

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^2 &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\pi}}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \sin^2\mu\pi} - \frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi\right\} \\ \nu^2 &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\pi}}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2 \sin^2\mu\pi} + \frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi\right\} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (6).$$

$\varkappa^2$ und ν^2 liegen beide dicht bei Eins (für kleine γ), sind aber größer Eins für $\gamma > 0$.

Für z erhalten wir nunmehr das Integral

$$z = \frac{i\,b\,e^{-i\alpha_0}}{V_\infty}\int t^{\frac{\gamma}{\pi}}\left\{\frac{e^{-i\mu\pi}}{(t - e^{-i\mu\pi})^2} - \frac{e^{i\mu\pi}}{(t - e^{i\mu\pi})^2} + \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{1}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{1}{t - e^{-i\mu\pi}}\right)\right\} dt.$$

Nun ist

$$\int \frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{i\mu\pi}}{(t - e^{i\mu\pi})^2}\, dt = -\frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{i\mu\pi}}{t - e^{i\mu\pi}} + \frac{\gamma}{\pi}\int \frac{e^{i\mu\pi}\, t^{\frac{\gamma}{\pi}}}{t(t - e^{i\mu\pi})}\, dt,$$

$$-\int \frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-i\mu\pi}}{(t - e^{-i\mu\pi})^2}\, dt = \frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\, e^{-i\mu\pi}}{t - e^{-i\mu\pi}} - \frac{\gamma}{\pi}\int \frac{e^{-i\mu\pi}\, t^{\frac{\gamma}{\pi}}}{t(t - e^{-i\mu\pi})}\, dt.$$

Weiter

$$\frac{\gamma}{\pi}\int\left\{\frac{e^{i\mu\pi}\, t^{\frac{\gamma}{\pi} - 1}}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}}{t - e^{i\mu\pi}}\right\} dt = -\frac{\gamma}{\pi}\int t^{\frac{\gamma}{\pi} - 1}\, dt,$$

$$-\frac{\gamma}{\pi}\int\left\{\frac{e^{-i\mu\pi}\, t^{\frac{\gamma}{\pi} - 1}}{t - e^{-i\mu\pi}} - \frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}}{t - e^{-i\mu\pi}}\right\} dt = \frac{\gamma}{\pi}\int t^{\frac{\gamma}{\pi} - 1}\, dt.$$

Also heben sich die übrigbleibenden Integrale fort und es folgt

$$z = \frac{i\,b\,e^{-i\alpha_0}}{V_\infty}\,t^{\frac{\gamma}{\pi}}\left\{\frac{e^{i\mu\pi}}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{e^{-i\mu\pi}}{t - e^{-i\mu\pi}}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

oder zusammengerechnet

$$z = -\frac{2\,b}{V_\infty}\,e^{-i\alpha_0}\,\frac{\sin\mu\pi\cdot t^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{t^2 - 2\,t\cos\mu\pi + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

wobei der Koordinatenanfang in dem Anschlußpunkt des Ruders an den Flügel liegt (C bzw. E).

Für die Gesamttiefe des Flügels erhalten wir

$$t_g = \frac{2\,b\sin\mu\pi}{V_\infty}\left\{\frac{(\varkappa^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{\varkappa^4 - 2\,\varkappa^2\cos\mu\pi + 1} + \frac{(\nu^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{\nu^4 - 2\,\nu^2\cos\mu\pi + 1}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

während man für λ erhält

$$\lambda = \frac{\dfrac{(\nu^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{\nu^4 - 2\,\nu^2\cos\mu\pi + 1}}{\dfrac{t_g\,V_\infty}{2\,b\sin\mu\pi}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Werden Quadrate von $\frac{\gamma}{\pi}$ vernachlässigt, so erhält man aus (6), (9) und (10)

$$b = \frac{t_g}{2}\,V_\infty\sin\mu\pi\,; \quad \lambda = \frac{1-\cos\mu\pi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Wir machen uns jetzt von der Strömung, die zur Auffindung der Abbildung führte, frei, indem wir setzen

$$b = \frac{t_g}{2}\,V_\infty\sin\mu\pi\cdot f,$$

wo f nach (9), (10) und (11) eine positive Funktion von γ und λ ist, die gleich Eins ist, wenn Quadrate von $\frac{\gamma}{\pi}$ vernachlässigt werden. Ferner schreiben wir $z\cdot e^{-i\alpha_0}$ statt z (d. h. wir drehen das Profil um den Winkel α_0) und erhalten so

$$z = -\,t_g\cdot\sin^2\mu\pi\cdot f\,\frac{t^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{t^2 - 2\,t\cos\mu\pi + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8a).$$

μ ist nach (10) bestimmt als Funktion von γ und λ. Die Abb. (8a) enthält keinerlei Größen mehr, die sich auf eine Strömung beziehen. Sie gilt für $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$, also auch für negatives γ (die x-Achse fällt jetzt in die Richtung von $\overrightarrow{BC}$). Die gefundene konforme Abbildung ist ein Beispiel für den Schwarz-Christoffelschen Abbildungssatz.

II. Auftrieb und Moment bei beliebigen Anstellwinkeln. Nachdem wir die Abbildungsfunktion (8) kennen, können wir Auftrieb und Moment bei beliebigen Anstellwinkeln berechnen. Dazu brauchen wir nur den Dipol in t_0 um den Winkel $-\alpha$ zu drehen, wenn in der z-Ebene die Anströmgeschwindigkeit mit der x-Achse den Winkel α einschließen soll (vgl. S. 197, Anm. 2). Der Anstellwinkel des Flügels ist dann $\alpha_0 + \alpha$. Jetzt wird natürlich auch die Zirkulation eine andere; sie ist wieder so zu bestimmen, daß der eine Staupunkt der Strömung in der t-Ebene in das Bild der Hinterkante, also in $t = -\nu^2$ fällt. Wir setzen also

$$w = i\cdot b\left\{\frac{e^{i(\mu\pi-\alpha)}}{t - e^{i\mu\pi}} - \frac{e^{-i(\mu\pi-\alpha)}}{t - e^{-i\mu\pi}} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{t - e^{i\mu\pi}}{t - e^{-i\mu\pi}}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

und erhalten aus der Bedingung $\frac{dw}{dt}=0$ für $t=-\nu^2$ die Zirkulation

$$\frac{\Gamma}{2\pi}=\frac{\gamma}{\pi}\cos\alpha-\sin\alpha\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}}{\sin\mu\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Der andere Staupunkt fällt dann nach

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}-\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi}{1+\frac{\gamma}{\pi}}\\ &\cdot\frac{\left(1+\frac{\gamma}{\pi}\right)\sin\mu\pi\cos\alpha+\sin\alpha\left(\cos\mu\pi-\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}\right)}{\left(1-\frac{\gamma}{\pi}\right)\sin\mu\pi\cos\alpha-\sin\alpha\left(\cos\mu\pi-\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}\right)}<\varkappa^2 \quad \text{für } \alpha>0\end{aligned}\right\} \quad . \quad (14),$$

liegt also für $\alpha>0$ auf der Unterseite des Flügels dicht bei der Vorderkante. Setzen wir $t-e^{i\mu\pi}=\tau$, so erhalten wir bis auf Terme in τ^3 [2]).

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=&V_\infty^2\,e^{2i\alpha_0}t^{-\frac{2\gamma}{\pi}}e^{-2i\alpha}\left\{1+2\tau e^{-i\mu\pi}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}e^{i\alpha}+\frac{\gamma}{\pi}\right)+\tau^2\left[e^{-2i\mu\pi}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}e^{i\alpha}+\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{e^{-2i\mu\pi}}{2\sin^2\mu\pi}(e^{2i\alpha}-1)+\frac{i\,e^{-i\mu\pi}}{\sin\mu\pi}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}e^{i\alpha}+\frac{\gamma}{\pi}\right)+\frac{2\gamma}{\pi}e^{-2i\mu\pi}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}e^{i\alpha}+\frac{\gamma}{\pi}\right)\right]+\cdots\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15),$$

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{i\,b\,e^{-i\alpha_0}}{V_\infty}t^{\frac{\gamma}{\pi}}e^{i\mu\pi}\frac{1}{\tau^2}\left\{1-\tau\frac{\gamma}{\pi}e^{-i\mu\pi}+\tau^2\left[\frac{e^{-2i\mu\pi}}{4\sin^2\mu\pi}-\frac{i\gamma\,e^{-i\mu\pi}}{2\pi\sin\mu\pi}\right]+\cdots\right\} \quad \ldots \quad (16),$$

$$\left.\begin{aligned}z\cdot\frac{dz}{dt}=&\frac{b^2e^{-2i\alpha_0}}{V_\infty^2}t^{\frac{2\gamma}{\pi}}e^{2i\mu\pi}\frac{1}{\tau^3}\left\{1-\tau\frac{\gamma}{\pi}e^{-i\mu\pi}+\tau^2\left[\frac{e^{-2i\mu\pi}}{4\sin^2\mu\pi}-\frac{i\gamma\,e^{-i\mu\pi}}{2\pi\sin\mu\pi}\right]+\cdots\right\}\\ &\cdot\left\{1+\tau\frac{i\,e^{-2i\mu\pi}}{2\sin\mu\pi}-\tau^2\frac{e^{-2i\mu\pi}}{4\sin^2\mu\pi}+\cdots\right\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17),$$

$$t^{-\frac{\gamma}{\pi}}=e^{-i\alpha_0}\left(1-\tau\frac{\gamma}{\pi}e^{-i\mu\pi}+\cdots\right).$$

Für Auftrieb und Moment haben wir nunmehr

$$P_x-iP_y=i\frac{\varrho}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz=-i\frac{\varrho}{2}\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\frac{dz}{dt}dt,$$

$$M=-\frac{\varrho}{2}\Re\oint z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz=\frac{\varrho}{2}\Re\oint\left(\frac{dw}{dz}\right)^2z\frac{dz}{dt}dt\text{ [3]}).$$

Die Auswertung ergibt

$$\mathfrak{P}=P_x+iP_y=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\pi\varrho V_\infty^2\left(\frac{2b}{V_\infty\sin\mu\pi}\right)\left[\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}-\frac{\gamma}{\pi}\cos\alpha\sin\mu\pi\right],$$

[2]) Für $\tau=0$ wird $t^{-\frac{2\gamma}{\pi}}=e^{-2i\alpha_0}$, also $\frac{dw}{dz}=V_\infty e^{-i\alpha}$; dadurch ist der obige Ansatz für w nachgeprüft. Der Grund, warum $t^{-\frac{2\gamma}{\pi}}$ nicht nach τ entwickelt wird, siehe Anm. 3.

[3]) Beim Einsetzen von (15) und (17) hebt sich $t^{-\frac{2\gamma}{\pi}}$ heraus.

$$\left.\begin{aligned} M = -\pi\,\varrho\,V_\infty^2 \frac{1}{4}\left(\frac{2\,b}{V_\infty \sin\mu\pi}\right)^2 \Bigg[\sin\alpha\cos\alpha\left(1+2\cos\mu\pi\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}\right) \\ -\frac{\gamma}{\pi}\sin\mu\pi\cos\mu\pi - 2\frac{\gamma}{\pi}\sin^2\alpha\sin\mu\pi\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Es ist bei dem Moment zu beachten, daß der Bezugspunkt in C liegt, also in dem Ansatzpunkt des Ruders an den Flügel. Für $\mathfrak{P}$ folgt aus (13) und (18) der Kutta-Joukowskische Satz

$$\mathfrak{P} = -e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\varrho\,V_\infty\,\Gamma\,b.$$

Wir erkennen, daß die Zirkulation um den Flügel in der z-Ebene bis auf den Faktor b mit der Zirkulation, die wir mit Hilfe der t-Ebene erhielten, übereinstimmt; Γ ist dimensionslos, Γb hat die Dimension einer Zirkulation und gibt zusammen mit ϱV_∞ die Dimension einer Kraft/cm, wie es sein muß.

Die Berechnung von $\mathfrak{P}$ läßt sich in etwas anderer Form einfacher leisten wie folgt: Es ist

$$\overline{\mathfrak{P}} = P_x - i\,P_y = -i\frac{\varrho}{2}\oint\left(\frac{d\,w}{d\,z}\right)^2\frac{d\,z}{d\,t}\,d\,t = -i\frac{\varrho}{2}\oint\left(\frac{d\,w}{d\,t}\right)^2\frac{d\,t}{d\,z}\,d\,t,$$

oder nach (8) und (12) mit $e^{i\mu\pi} = t_0$

$$\overline{\mathfrak{P}} = -i\frac{\varrho\,b\,V_\infty\,e^{i\alpha_0}}{4\sin\mu\pi}\oint\frac{t^{-\frac{\gamma}{\pi}}}{\left[t^2\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)-2\,t\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi+\frac{\gamma}{\pi}+1\right](t-t_0)^2\,(t-\bar{t}_0)^2}$$

$$\cdot\left[e^{-i(\mu\pi-\alpha)}(t-t_0)^2 - e^{i(\mu\pi-\alpha)}(t-\bar{t}_0)^2 + \frac{i\cdot\Gamma\sin\mu\pi}{\pi}(t-t_0)(t-\bar{t}_0)\right]^2 d\,t.$$

Man erkennt, daß die beim Ausquadrieren der eckigen Klammer erscheinenden Glieder nur zum Teil einen Beitrag zum Residuum an der Stelle t_0 liefern. Einen Beitrag liefert nur $\{e^{i(\mu\pi-\alpha)}(t-\bar{t}_0)\}^2$ und das in Γ lineare Glied. Nachdem aber die Kraft nach dem Kutta-Joukowskischen Satz sich proportional Γ ergeben muß, kann nur das in Γ lineare Glied einen Beitrag liefern (man überzeugt sich leicht, daß das andere Glied tatsächlich das Residuum Null ergibt). Es ist dann

$$\overline{\mathfrak{P}} = -\frac{\varrho\,b\,V_\infty\,e^{i\alpha_0}\,e^{i(\mu\pi-\alpha)}\,\Gamma}{2\pi}\oint\frac{1}{t-t_0}\cdot\frac{t^{-\frac{\gamma}{\pi}}(t-\bar{t}_0)}{t^2\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)-2\,t\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi+\frac{\gamma}{\pi}+1}\,d\,t.$$

Hier ist das Residuum aber sofort abzulesen. — Für die Berechnung des Momentes ergibt sich nach dieser Methode kein Vorteil gegenüber der Reihenentwicklung nach (15) und (16).

Zur Kontrolle berechnen wir noch den Wert der Ausdrücke (18) für $\gamma = 0$, also für verschwindenden Ruderausschlag. Man erhält

$$A = \pi\,\varrho\,V_\infty^2\,t_g\sin\alpha; \quad M = -\pi\,\varrho\,V_\infty^2\frac{t_g}{4}(2\cos\mu\pi+1)\sin\alpha\cos\alpha; \quad \lambda = \frac{1-\cos\mu\pi}{2}.$$

Die Luftkraft wird gleich der des ebenen Flügels und greift in ein Viertel Flügeltiefe von der Vorderkante an, wie es sein muß $(2\cos\mu\pi+1 = 3-4\lambda)$. Vernachlässigen wir wieder Quadrate von $\frac{\gamma}{\pi}$, so bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} A &= \pi\,\varrho\,V_\infty^2\,t_g\left[\sin\alpha - \frac{\gamma}{\pi}\cos\alpha\sin\mu\pi\right]; \qquad \lambda = \frac{1-\cos\mu\pi}{2}; \qquad \mu = \frac{\alpha_0}{\gamma}; \\ M &= -\pi\,\varrho\,V_\infty^2\frac{t_g{}^2}{4}\left[\sin\alpha\cos\alpha(1+2\cos\mu\pi) - \frac{\gamma}{\pi}\sin\mu\pi\cos\mu\pi - 2\frac{\gamma}{\pi}\sin^2\alpha\sin\mu\pi\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (19).$$

Der dritte Term in der Klammer für das Moment ist im Bereich normaler Anstellwinkel so klein, daß man ihn ruhig fortlassen kann.

Bestimmung der Luftkräfte auf einen ebenen Tragflügel mit Querruder.

Von *G. Ellenberger* in Berlin[1]).

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Bedürfnis heraus entstanden, den Einfluß des Querruders bei Flügelschwingungen kennenzulernen. Dazu ist vor allem die Kenntnis der Luftkräfte notwendig, die bei einer Schwingung des Flügels auf diesen wirken. Zur Bestimmung der Luftkräfte auf einen Körper unter Berücksichtigung der sich ablösenden Wirbel bei nicht stationärer ebener Strömung sind zwei Methoden anwendbar.

1. Methode von H. Wagner[2]). Dieser bestimmt unter Zuhilfenahme der konformen Abbildung die sich ablösenden Wirbel aus der Bedingung glatten Abflusses an der Hinterkante des Flügels. Es ergeben sich so die Kräfte auf einen ebenen Tragflügel, der die allgemeinste Bewegung ausführt.

2. Methode von W. Ackermann und W. Birnbaum[3]). Diese ersetzen den Flügel durch eine tragende Wirbelfläche und gelangen unter Verzicht auf die Hilfsmittel der konformen Abbildung zu gewissen Ansätzen für die Luftkräfte. In einer zweiten Arbeit wurden diese Ansätze von W. Birnbaum[4]) auf einen schwingenden Tragflügel angewendet.

Im folgenden wird die erste Methode nach H. Wagner benutzt. Es werden die Luftkräfte auf einen ebenen Tragflügel mit Querruder berechnet, für den Fall, daß der Flügel die allgemeinste Bewegung ausführt. In Abschnitt I wird das Problem und die Berechnungsmethode auseinandergesetzt. Die Abschnitte II bis VI enthalten die mathematische Durchführung der Berechnung der Luftkräfte. In Abschnitt VII ist das Ergebnis gebracht mit einer Zusammenstellung der Voraussetzungen und mit dem für die praktische Verwendung der Luftkräfte notwendigen Kurven- und Zahlenmaterial (das Ergebnis kann natürlich auch als Grundlage dienen zur Berechnung der Luftkräfte auf Höhen- und Seitenleitwerke). Die gefundenen Ansätze für die Luftkräfte werden dann noch angewendet:

1. Auf die allgemeinste Bewegung eines Flügels ohne Querruder,
2. auf die stationäre Bewegung eines Flügels mit Querruder,
3. auf einen harmonisch schwingenden Flügel mit Querruder.

I. Das Problem und die Berechnungsmethode.

Das Profil des Flügels mit Querruder ersetzen wir durch zwei gegeneinander abgewinkelte Strecken (Länge l_1 und l_2, Abb. 1). Der Flügel ist senkrecht zur Ebene der Abb. 1 unendlich ausgedehnt zu denken. Er ist geometrisch durch folgende Daten bestimmt:

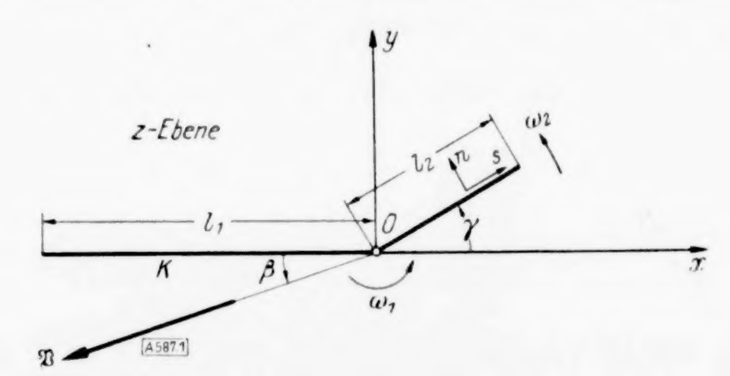


Abb. 1. Angaben für die geometrische Form und für die Bewegung des Flügels.

Gesamtflügeltiefe l: $l = l_1 + l_2$. Verhältnis λ von Querrudertiefe zu Gesamtflügeltiefe:

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \qquad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

Querruderausschlag: γ.

[1]) Mitteilung aus dem Flugtechnischen Institut der Technischen Hochschule Berlin (Prof. Dr.-Ing. H. Wagner).

[2]) H. Wagner: Dynamischer Auftrieb von Tragflügeln, ZAMM 1925, S. 17 bis 35.

[3]) W. Birnbaum: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie, ZAMM 1923, S. 290 bis 297.

[4]) W. Birnbaum: ZAMM 1924, S. 278 bis 292.

Wir legen also für unsere Betrachtungen ein symmetrisches Profil zugrunde, das wir durch sein Profilskelett ersetzen. Für Profile mit gekrümmtem Profilskelett läßt sich die Erweiterung der Ergebnisse leicht durchführen (siehe später Abschnitt VII).

Der allgemeinste Bewegungszustand des Flügels sei dargestellt durch Überlagerung von

1. einer Translation des Flügels, gegeben durch die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ (Komponenten V_x, V_y) des Punktes O,
2. einer Drehung des ganzen Flügels um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 (entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gerechnet),
3. einer Drehung des Querruders (l_2) um O relativ zum Hauptflügel (l_1) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 (entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gerechnet).

Das x, y-System sei ein mit dem Hauptflügel (l_1) fest verbundenes Koordinatensystem.

Die Flüssigkeit (Luft), in der sich der Flügel bewegt, denken wir uns reibungsfrei, imkompressibel und von konstanter Dichte ϱ. Für die Bestimmung der Strömung können wir die allgemeinen Methoden der zweidimensionalen Potentialtheorie (speziell der Funktionentheorie) anwenden. Es gilt dann für die Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit dem Strömungspotential φ

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0.$$

Wir setzen ferner voraus, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht und daß für sehr große Abstände d vom Knickpunkt O gilt

$$|\mathfrak{v}| \leq \frac{c}{d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo c eine Konstante ist. Die Bedingung (1) garantiert uns bis auf eine unwesentliche Konstante die Eindeutigkeit des Potentials φ[5]).

Wir lassen uns nun von folgendem Gedankengang leiten: Nach H. Wagner (Anm. 2) ist die Kraft $\mathfrak{P}$ auf einen bewegten Körper unter den zuletzt gemachten Voraussetzungen gegeben durch den Ausdruck

$$\mathfrak{P} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} \varphi \, d\mathfrak{f} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wobei das Integral über die Oberfläche F des Körpers und über Flächen F' zu erstrecken ist, welche den Raum (im ebenen Falle die Ebene) einfach zusammenhängend machen. Der mehrfach zusammenhängende Raum (bzw. die mehrfach zusammenhängende Ebene) ist dabei gebildet durch den Außenraum, der vom Körper und den vorhandenen Wirbelfäden bestimmt wird. Der Vektor $d\mathfrak{f}$ des Flächenelementes ist vom betrachteten Flüssigkeitsraum nach außen gerichtet; $\frac{d}{d\tau}$ bedeutet den Differentialquotienten nach der Zeit τ. Für das Moment $\mathfrak{M}$ gilt ein entsprechender Ausdruck

$$\mathfrak{M} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} \varphi \, [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

$\mathfrak{r}$ ist der Radiusvektor von einem ortsfesten Raumpunkt nach dem Flächenelement $d\mathfrak{f}$. Wir werden im folgenden als Momentenpunkt denjenigen raumfesten Punkt wählen, der in dem betrachteten Zeitpunkt mit dem Knickpunkt O des Flügels zusammenfällt. Für unser ebenes Problem ergeben sich $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ pro Zentimeter Flügelbreite (senkrecht zur Ebene der Abb. 1).

Für die Berechnung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ muß das Potential φ bekannt sein. Wir zerlegen es in vier Teilpotentiale φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4. Dabei bedeutet: φ_1 das Potential der Strömung, die einer Translation des Flügels mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ entspricht; φ_2 das Potential der Strömung, die einer Drehung des Flügels um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 entspricht; φ_3 das Potential der Strömung, die einer Drehung des Querruders um O relativ zum Hauptflügel (l_1) mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \frac{d\gamma}{d\tau}$ entspricht; φ_4 das Potential der Strömung,

[5]) Obige Voraussetzungen sind im folgenden immer erfüllt. Es ist dann die Zirkulation längs einer genügend großen den Flügel (und die Wirbel) umgebenden Kurve Null.

die bei ruhendem Flügel dem Vorhandensein der Wirbel hinter dem Flügel und der Zirkulation um den Flügel entspricht (vgl. H. Wagner, S. 35, siehe Anm. 2). Die Zusammensetzung der vier Teilströmungen gibt gerade die Strömung, die dem allgemeinsten Bewegungszustand des Flügels entspricht. Unsere Aufgabe besteht darin, das Potential φ zu bestimmen und daraus nach (2) und (3)[6]) die Kräfte auf den Flügel zu berechnen.

II. Die grundlegende konforme Abbildung.

Bevor wir an die Berechnung der Teilpotentiale φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 gehen, brauchen wir die konforme Abbildung des von dem Flügelprofil (Abb. 2) bestimmten Außenbereichs der z-Ebene ($z = x + i\,y$) auf eine Halbebene der komplexen Veränderlichen t. Diese Abbildung wurde

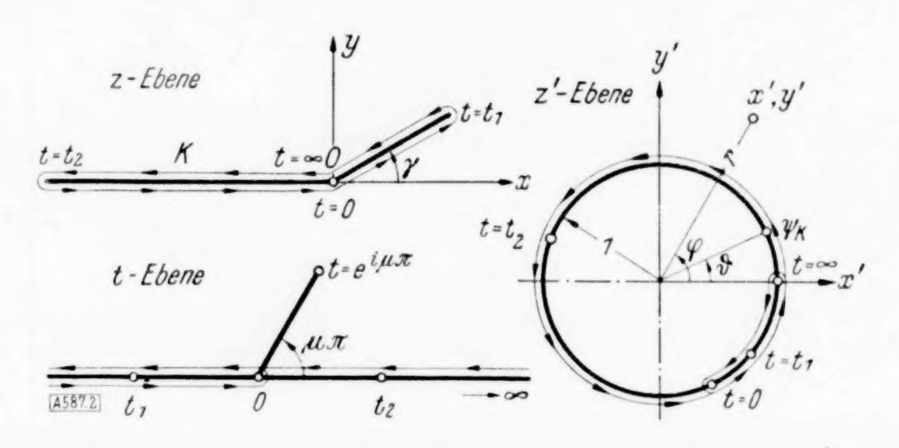


Abb. 2. Der Zusammenhang zwischen der z-, t- und z'-Ebene.

vor einiger Zeit von C. Schmieden, Rostock, gefunden. Die Einzelheiten der konformen Abbildung sind in der vorhergehenden Arbeit von C. Schmieden (S. 193) mitgeteilt. Wir bringen hier zusammenfassend das Ergebnis. Die konforme Abbildung des von dem Flügelprofil bestimmten Außenbereichs der z-Ebene auf die obere t-Halbebene lautet für $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$:

$$z = -f\,l\,\frac{\sin^2\mu\pi\cdot t^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{t^2 - 2\,t\cos\mu\pi + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wobei $t^{\frac{\gamma}{\pi}} = e^{\frac{\gamma}{\pi}(\ln|t| + i\,\mathrm{arc}\,t)}$ mit $0 \leqq \mathrm{arc}\,t \leqq \pi$; $f = f(\lambda, \gamma)$ und $\mu = \mu(\lambda, \gamma)$ sind bestimmte reelle Funktionen von λ und γ. Für die praktische Verwendung der Formeln für die Kräfte interessieren nur Querruderausschläge γ, die klein sind, also $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| \ll 1$. Für diesen Fall der „ersten Näherung" wird, wenn wir $\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2$ und höhere Potenzen vernachlässigen,

$$f(\lambda, \gamma) = 1 \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1 - \cos\mu\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

mit

$$0 \leqq \mu \leqq 1$$

(der Ausdruck „erste Näherung" soll im folgenden immer bedeuten, daß wir $\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2$ und höhere Potenzen von $\frac{\gamma}{\pi}$ vernachlässigen). Wir brauchen später noch die Abbildung der oberen t-Halbebene auf das Äußere des Einheitskreises einer z'-Ebene ($z' = x' + i\,y'$, Abb. 2)

$$z' = \frac{t - e^{-i\mu\pi}}{t - e^{i\mu\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

$e^{i\mu\pi}$ und $e^{-i\mu\pi}$ sind die Nullstellen der Nennerfunktion von (4). Wir haben dann folgendes Entsprechen (in Abb. 2 sind die entsprechenden t-Werte auch in der z- und z'-Ebene angeschrieben):

[6]) Die im Text vorkommenden in Klammern gesetzte Zahlen sind Hinweise auf Gleichungen und Beziehungen, die bereits entwickelt wurden.

t	z	$\frac{dz}{dt}$	z'
t_1	$l_2 e^{i\gamma}$	0	z'_1
0	0	0	$e^{-2i\mu\pi}$
t_2	$-l_1$	0	z'_2
∞	0	0	1
$e^{i\mu\pi}$	∞	∞	∞
$e^{-i\mu\pi}$	∞	∞	0

$$t_1 = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\pi}}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}-\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi\right]$$

$$t_2 = \frac{-1}{1-\frac{\gamma}{\pi}}\left[\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^2\sin^2\mu\pi}+\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi\right]$$

$$\frac{dz}{dz'} = f\frac{l\cdot i}{4}t^{\frac{\gamma}{\pi}}\left[-i\,e^{i\mu\pi}-2\frac{\frac{\gamma}{\pi}\sin\mu\pi}{z'}+\frac{i\,e^{-i\mu\pi}}{z'^2}\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = -f\,l\sin^2\mu\pi\,\frac{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\left[t^2\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)-2t\frac{\gamma}{\pi}\cos\mu\pi+\frac{\gamma}{\pi}+1\right]}{(t^2-2t\cos\mu\pi+1)^2} \qquad \ldots\ldots\ (7).$$

III. Das Potential φ der Strömung.

Es ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$; φ_1, φ_2, φ_3 werden für $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$ berechnet, und zwar so, daß die Zirkulation um den Flügel jeweils Null ist. Durch φ_4 berücksichtigen wir die tatsächlich um den Flügel vorhandene Zirkulation (φ_4 wird nur für $\gamma = 0$ ermittelt).

1. Berechnung von φ_1. Gesucht ist das Potential für die Strömung um den Flügel, der sich mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ ($V_x = -V\cos\beta$; $V_y = -V\sin\beta$; $V = |\mathfrak{V}|$, siehe Abb. 1) bewegt. Wir gehen von dem komplexen Strömungspotential $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ aus und bestimmen zunächst ψ_1 aus der hier für die Strömungsfunktion ψ_1 bekannten Grenzbedingung. Es gilt nämlich längs der Kontur K des Flügels für die bekannte Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ (Abb. 1)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -V_x\left(\frac{dy}{ds}\right)_K + V_y\left(\frac{dx}{ds}\right)_K = -\frac{\partial\psi_{1K}}{\partial s}\ [7]).$$

Daraus folgt durch Integration längs s, wenn wir eine belanglose Konstante unterdrücken:

$$\psi_{1K} = V_x y - V_y x \qquad \ldots\ldots\ (8).$$

Es ergibt sich jetzt folgende Randwertaufgabe. Gesucht ist eine harmonische Funktion $\psi_1(x, y)$ der z-Ebene, die auf dem Rand (Flügelprofil) die vorgegebenen Werte ψ_{1K} (8) annimmt. Diese Funktion ist eindeutig bestimmt. ψ_1 ist vermöge der konformen Abbildungen (4) und (6) auch eine harmonische Funktion von x' und y' (Abb. 2). Die zugehörigen Randwerte auf dem Einheitskreis der z'-Ebene (Bild des Randes der z-Ebene) sind durch die konformen Abbildungen (4) und (6) bekannt. Wir können daher mit Hilfe des Poissonschen Integrals ψ_1 als Funktion von x' und y' ermitteln. Nachdem durch (4) und (6) der durch das Flügelprofil bestimmte Außenbereich der z-Ebene auf das Äußere des Einheitskreises der z'-Ebene abgebildet wird, brauchen wir das Poissonsche Integral für das Äußere des Einheitskreises. Es ist dann

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-1)\,\psi_{1K}\,d\vartheta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\vartheta)} \qquad \ldots\ldots\ (9).$$

[7]) Vgl. z. B. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik 1931, S. 91.

Die Bedeutung der neu auftretenden Buchstaben ergibt sich aus Abb. 2. Es ist ferner nach (8)

$$\psi_{1K} = -V\,\mathfrak{Im}\,\{z\,e^{-i\beta}\}\quad{}^{8}).$$

Das Integral (9) nach ϑ schreiben wir vermöge der Abbildung (6) um in ein Integral nach t (t reell!). Es ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\psi_1 = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{f\,l\,V}{\pi\sin\mu\pi}\cdot\frac{(r^2-1)\,t\,\mathfrak{Im}\,\{t^{\frac{\gamma}{\pi}}\,e^{-i\beta}\}\,d\,t}{(1+t'^2)\,[(1+r^2)\,(1+t'^2)-2\,r\cos\varphi\cdot(t'^2-1)-4\,r\sin\varphi\cdot t']} \quad . \; . \; . \quad (9\text{a}),$$

wobei zur Abkürzung $t' = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{t-\cos\mu\pi}{\sin\mu\pi}$ gesetzt wurde. Wir betrachten zunächst das Integral P_1

$$P_1 = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{f\,l\,V}{\pi\sin\mu\pi}\cdot\frac{(r^2-1)\,t\cdot t^{\frac{\gamma}{\pi}}\,e^{-i\beta}\,d\,t}{(1+t'^2)\,[(1+r^2)\,(1+t'^2)-2\,r\cos\varphi\cdot(t'^2-1)-4\,r\sin\varphi\cdot t']} \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Es ist dann

$$\psi_1 = \mathfrak{Im}\,\{P_1\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Für $t \to \infty\ (t' \to \infty)$ verhält sich der Integrand von (10) wie $\frac{1}{|t|^{3-\frac{\gamma}{\pi}}}$, d. h. wir können das Integral P_1 durch ein Umlaufintegral ersetzen, da $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$. Wir erhalten so

$$P_1 = -2\pi i\,[\mathfrak{Res}\,(t' = t_1') + \mathfrak{Res}\,(t' = t_2')] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

$t'_1 = i$ und $t'_2 = \frac{2\,r\sin\varphi + i\,(r^2-1)}{1+r^2-2\,r\cos\varphi}$ sind die beiden in der oberen t'-Halbebene (t-Halbebene) gelegenen Nullstellen der Nennerfunktion von (10). Die praktische Durchrechnung ergibt für w_1 unter Beachtung von (11) und (12)

$$w_1 = \varphi_1 + i\,\psi_1 = \frac{f\,l\,V}{4}\left[z'\,e^{i\,(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)} + \frac{e^{-i\,(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)}}{z'}\right] - V\,z\,e^{-i\beta};$$

oder nach (6)

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{i\,f\,l\,V\sin\mu\pi}{2}\left[\frac{e^{i\,(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)}}{t-e^{i\mu\pi}} - \frac{e^{-i\,(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)}}{t-e^{-i\mu\pi}}\right] - V\,z\,e^{-i\beta} + \frac{f\,l\,V}{2}\cos(\mu\pi+\gamma\mu-\beta) \\ &= f\,l\,V\sin\mu\pi\,\frac{\sin(\gamma\mu-\beta) - t\sin(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)}{t^2-2\,t\cos\mu\pi+1} - V\,z\,e^{-i\beta} + \frac{f\,l\,V}{2}\cos(\mu\pi+\gamma\mu-\beta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13).$$

Deutung von (13): Der erste Bestandteil stellt das Potential einer Strömung um den ruhenden Flügel dar, wobei die Geschwindigkeit im Unendlichen $V\,e^{i\beta}$ ist[9]). Der zweite Bestandteil hebt die Parallelströmung im Unendlichen auf und gibt zusammen mit dem ersten Bestandteil, bis auf die belanglose Konstante $\frac{f\,l\,V}{2}\cos(\mu\pi+\gamma\mu-\beta)$, unser gesuchtes w_1. Für $\mathfrak{v}_1 = \overline{\frac{d\,w_1}{d\,z}}$[10]) ist die Bedingung (1) erfüllt (Beweis am besten aus der Integraldarstellung (9) für ψ_1 in Verbindung mit (7)).

2. Berechnung von φ_2. Gesucht ist das Potential für die Strömung um den Flügel, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um O dreht. Wir gehen wie bei der Berechnung von φ_1 vor. Es gilt jetzt für die Strömungsfunktion ψ_2 des komplexen Strömungspotentials $w_2 = \varphi_2 + i\,\psi_2$ längs der Berandung K (Abb. 1)

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \omega_1\,|z| = -\frac{\partial\psi_{2K}}{\partial s}\quad{}^{11}).$$

Daraus folgt, wenn wir eine belanglose Konstante weglassen,

$$\psi_{2K} = -\frac{\omega_1}{2}\,|z|^2\quad{}^{12}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

[8]) $\mathfrak{Im}$ bedeutet imaginärer Teil, $\mathfrak{Re}$ reeller Teil.
[9]) Vgl. die vorhergehende Arbeit von C. Schmieden S. 196 Gl. 12 mit $\Gamma = 0$.
[10]) Querstrich bedeutet Übergang zum konjugiert komplexen Wert.
[11]) Vgl. z. B. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik 1931, S. 95.
[12]) Das Minuszeichen erscheint hier, weil wir $\mathfrak{v} = +\operatorname{grad}\varphi$ setzen, im Gegensatz zu Lamb, der mit $\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi$ rechnet.

ψ_2 als Funktion von x' und y' ergibt sich wie bei (9) als Poissonsches Integral

$$\psi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-1)\,\psi_{2K}\,d\vartheta}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\vartheta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

Es ist ferner nach (14) und (4)

$$\psi_{2K} = -\frac{\omega_1}{2}|z|^2 = -\frac{\omega_1 f^2 l^2 \sin^4 \mu\pi}{2} \cdot \frac{(t^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}}{(t^2-2t\cos\mu\pi+1)^2}; \; (t \text{ reell!}).$$

Das Integral (15) nach ϑ schreiben wir wieder vermöge der Abbildung (6) um in ein Integral nach t (t reell!). Es ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\psi_2 = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\omega_1 f^2 l^2}{2\pi\sin\mu\pi} \cdot \frac{(r^2-1)(t^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}\,dt}{(1+t'^2)\left[(1+r^2)(1+t'^2)-2r\cos\varphi\cdot(t'^2-1)-4r\sin\varphi\cdot t'\right]} \quad . \; . \; (15a)$$

(vgl. dazu (9a)). Dieses reelle Integral läßt sich durch komplexe Integration lösen. Zu dem Zwecke betrachten wir das folgende Integral P_2 über eine in der oberen t-Halbebene analytische Funktion

$$P_2 = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\omega_1 f^2 l^2}{2\pi\sin\mu\pi} \cdot \frac{(r^2-1)\,t^{2+2\frac{\gamma}{\pi}}\,dt}{(1+t'^2)\left[(1+r^2)(1+t'^2)-2r\cos\varphi\cdot(t'^2-1)-4r\sin\varphi\cdot t'\right]} \quad . \; . \; (16)$$

mit $t^{2\frac{\gamma}{\pi}} = e^{2\frac{\gamma}{\pi}(\ln|t| + i \operatorname{arc} t)}$, $0 \leq \operatorname{arc} t \leq \pi$; für $t \to \infty$ ($t' \to \infty$) verhält sich der Integrand wie $\frac{1}{|t|^{4-2\frac{\gamma}{\pi}}}$, d. h. wir können das Integral wieder durch ein Umlaufintegral ersetzen, da $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$.

Wir erhalten

$$P_2 = -2\pi i\left[\Re\mathfrak{e}\mathfrak{f}\,(t'=t_1') + \Re\mathfrak{e}\mathfrak{f}\,(t'=t_2')\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16a);$$

$t_1' = i$ und $t_2' = \frac{2r\sin\varphi + i(r^2-1)}{1+r^2-2r\cos\varphi}$ sind die beiden in der oberen t'-Halbebene (t-Halbebene) gelegenen Nullstellen der Nennerfunktion von (16) (die Residuen sind für den in (16) auftretenden Integranden zu berechnen). Der Zusammenhang zwischen P_2 und ψ_2 wird durch die Verschiedenheit der Funktionen $(t^2)^{1+\frac{\gamma}{\pi}}$ und $t^{2+2\frac{\gamma}{\pi}}$ bedingt:

Wir zerlegen das Integral (15a) in zwei Teilintegrale $J_{\rm I} = \int_0^{-\infty} \ldots dt$ und $J_{\rm II} = \int_{+\infty}^{0} \ldots dt$. Es wird dann auf Grund der Festsetzung über arc t

$$J_{\rm I}\, e^{2i\gamma} + J_{\rm II} = P_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17).$$

Da $J_{\rm I}$ und $J_{\rm II}$ reell sind, lassen sich beide aus (17) berechnen. Es ist

$$J_{\rm I} + J_{\rm II} = \psi_2 = \Re\mathfrak{e}\,\{P_2\} + \operatorname{tg}\gamma \cdot \Im\mathfrak{m}\,\{P_2\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Die Berechnung von (16a) ergibt

$$\left.\begin{aligned} P_2 = \frac{\omega_1 f^2 l^2}{32 r^2}\, e^{2i\varphi}\, e^{i\mu\pi\left(1+2\frac{\gamma}{\pi}\right)} \Big[& (r^2-1)\, e^{i\mu\pi} \left\{2r\, e^{-i\varphi}\left(1+\frac{\gamma}{\pi}\right) - 4r\, e^{-i\varphi} + r^2 + 1\right\} \\ & -(r^2-1)\, e^{-i\mu\pi}\, 2r\, e^{-i\varphi}\left(1+\frac{\gamma}{\pi}\right) \\ & - e^{i\mu\pi}(r-e^{-2i\mu\pi}e^{-i\varphi})^2 (r-e^{-i\varphi})^2 \left(\frac{r-e^{-2i\mu\pi}e^{-i\varphi}}{r-e^{-i\varphi}}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} \Big] \end{aligned}\right\} \quad . \; (16b).$$

[13]

Die praktische Aufspaltung von P_2 in reellen und imaginären Teil ist nicht notwendig. Man kann direkt das komplexe Potential $w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ aus (18) und (16b) ablesen:

[13]) Die Berechnung von P_2 hat Herr von Borbely ausgeführt.

$$\left.\begin{aligned} w_2 = \frac{\omega_1 f^2 l^2}{32} \Big[& (\operatorname{tg}\gamma + i)\left\{ z'^2 e^{i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)} + 4 i \sin\mu\pi \left(1 + \frac{\gamma}{\pi}\right) z' e^{i(\mu\pi + 2\gamma\mu)} - 4 z' e^{i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)} \right\} \\ & + (\operatorname{tg}\gamma - i)\left\{ \frac{e^{-i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'^2} - 4 i \sin\mu\pi \left(1 + \frac{\gamma}{\pi}\right) \frac{e^{-i(\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'} - 4 \frac{e^{-i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'} \right\} \\ & - (\operatorname{tg}\gamma + i) \left(\frac{z' e^{i\mu\pi} - e^{-i\mu\pi}}{z' - 1} \right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} e^{2i\mu\pi} (z' - e^{-2i\mu\pi})^2 \left(\frac{z' - 1}{z'} \right)^2 \Big] \end{aligned} \right\} \quad (19).$$

Die Gl. (19) gibt w_2 für $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$[14]. Für $\mathfrak{v}_2 = \overline{\frac{d w_2}{d z}}$ ist die Bedingung (1) erfüllt.

3. Berechnung von φ_3. Gesucht ist das Potential der Strömung um den Flügel, wenn sich das Querruder um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 dreht. Die Ermittlung von φ_3 ist bereits durch die Berechnung von φ_2 mitgeleistet worden. Wir haben jetzt als Randbedingung für die Strömungsfunktion ψ_3 des komplexen Potentials $w_3 = \varphi_3 + i\psi_3$

$$\psi_{3K} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0 \\ -\dfrac{\omega_2}{2}|z|^2 & \text{für } t < 0 . \end{cases}$$

Das der Gl. (15a) entsprechende Poissonsche Integral wird jetzt

$$\psi_3 = \int\limits_0^{-\infty} \frac{\omega_2 f^2 l^2}{2\pi \sin\mu\pi} \cdot \frac{(r^2 - 1)(t^2)^{1 + \frac{\gamma}{\pi}} \, d t}{(1 + t'^2)\left[(1 + r^2)(1 + t'^2) - 2 r \cos\varphi \cdot (t'^2 - 1) - 4 r \sin\varphi \cdot t'\right]},$$

d. h. $\psi_3 = J_{\mathrm{I}}$, wenn in J_{I} statt ω_1 sinngemäß ω_2 geschrieben wird. Aus (17) berechnet sich J_{I} zu

$$J_{\mathrm{I}} = \psi_3 = \frac{\Im\mathrm{m}\{P_2\}}{\sin 2\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Es ist dann nach (16b) und (20) für $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| < 1$

$$\left.\begin{aligned} w_3 = \varphi_3 + i\psi_3 = \frac{\omega_2 f^2 l^2}{32 \sin 2\gamma} \Big[& z'^2 e^{i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)} + 4 i \sin\mu\pi \left(1 + \frac{\gamma}{\pi}\right) z' e^{i(\mu\pi + 2\gamma\mu)} - 4 z' e^{i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)} \\ & + \frac{e^{-i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'^2} - 4 i \sin\mu\pi \left(1 + \frac{\gamma}{\pi}\right) \frac{e^{-i(\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'} - 4 \frac{e^{-i(2\mu\pi + 2\gamma\mu)}}{z'} \\ & - \left(\frac{z' e^{i\mu\pi} - e^{-i\mu\pi}}{z' - 1} \right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} e^{2i\mu\pi} (z' - e^{-2i\mu\pi})^2 \left(\frac{z' - 1}{z'} \right)^2 \Big] \end{aligned} \right\} \quad (21).$$ [15]

Für $\mathfrak{v}_3 = \overline{\frac{d w_3}{d z}}$ ist die Bedingung (1) erfüllt.

4. Berechnung von φ_4. φ_4 ist das Potential, das die von der Hinterkante des Flügels sich ablösenden Wirbel erzeugen. Jeder abgelöste Wirbel mit der Zirkulation Γ bewirkt eine entgegengesetzt gleiche Zirkulation $-\Gamma$ um den Flügel, da die Gesamtzirkulation nach (1) für jeden Zeitpunkt Null sein muß. Wir setzen $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| \ll 1$ voraus; ferner kleinen Anstellwinkel β des Flügels, d. h. V_y soll klein sein gegenüber V_x; ferner seien $\frac{d V_x}{d\tau}$, $\frac{d V_y}{d\tau}$, ω_1, $\frac{d\omega_1}{d\tau}$, ω_2, $\frac{d\omega_2}{d\tau}$ klein. Die Stärke (Γ) der sich ablösenden Wirbel wird dann auch klein sein. Produkte der kleinen Größen $\frac{\gamma}{\pi}$, $\frac{d V_x}{d\tau}$, $\frac{d V_y}{d\tau}$, ω_1, $\frac{d\omega_1}{d\tau}$, ω_2, $\frac{d\omega_2}{d\tau}$, Γ untereinander werden wir an geeigneter Stelle immer vernachlässigen, da sie klein von zweiter Ordnung sind (wir

[14] Der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ läßt sich durch Grenzübergang erledigen. Er interessiert uns im folgenden nicht, da wir später $\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| \ll 1$ voraussetzen.

[15] Die Fälle $\gamma = 0$ und $\gamma = \frac{\pi}{2}$ erhält man durch Grenzübergang.

verweisen später des öfteren auf diese Voraussetzungen unter der Bezeichnung Abschn. III, 4). Für die Bestimmung von φ_4 kann nun auf Grund dieser Vernachlässigung $\gamma = 0$ gesetzt werden, denn für $\gamma \neq 0$ würde sich ein Zusatzglied ergeben, das proportional $\Gamma \cdot \gamma$ ist. Außerdem können wir für den weiteren Verlauf des Flügels von der Eigenbewegung der abgelösten Wirbel absehen; denn bei Berücksichtigung der Eigenbewegung der Wirbel würden wir für das Potential φ_4 ein Zusatzglied erhalten, das von zweiter Ordnung klein ist. Bei der Bewegung des Flügels mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bleiben dann die Wirbel im Raume fest. Nachdem wir kleinen Anstellwinkel β vorausgesetzt haben, benutzen wir für die Berechnung von φ_4 für die Richtung von $\mathfrak{V}$ die V_x-Richtung, indem wir die Wirbel auf der x-Achse annehmen (der Fehler, der dadurch bei der Bestimmung von φ_4 entsteht, ist von zweiter Ordnung klein, also zu vernachlässigen). Durch φ_1 haben wir schon die Translation des Flügels mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ berücksichtigt. Zur Ermittlung von φ_4 müssen wir daher den Flügel als ruhend voraussetzen und das Potential für eine sich auf der x-Achse von der Hinterkante aus erstreckende Wirbelschicht berechnen.

Wir betrachten zunächst einen einzigen Wirbel mit der Zirkulation Γ (entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gezählt) im Abstande x von der Mitte O' des Flügels (Abb. 3). Wir bilden den Flügel durch die Funktion

$$Z = X + i\,Y = z + \sqrt{z^2 - b^2} \quad \ldots \quad (22)$$

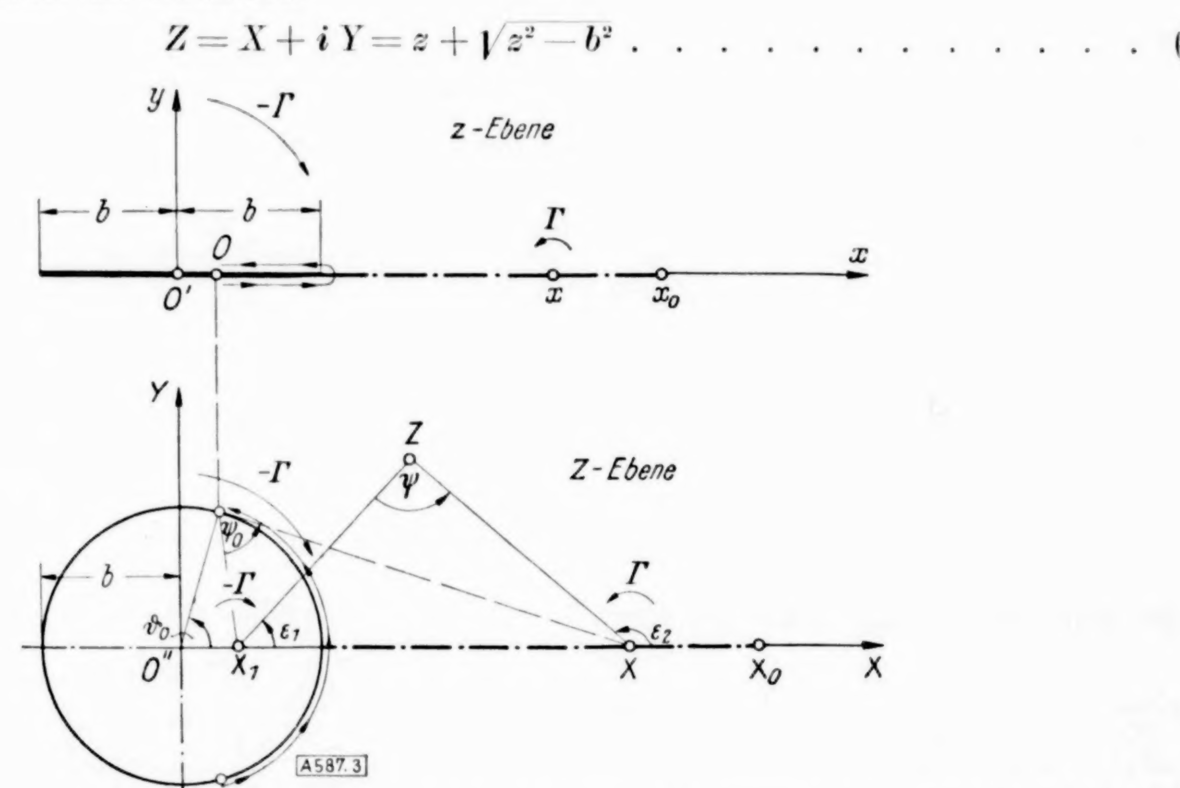


Abb. 3. Der Zusammenhang zwischen der Z- und z-Ebene zur Bestimmung von φ_4.

auf einen Kreis um O'' mit dem Radius b ab. Bezüglich der Bezeichnungen siehe Abb. 3 (für diese Untersuchung ist vorübergehend $l = 2b$ gesetzt, ferner geht die y-Achse nicht wie bisher durch O, sondern durch O'). Mit Hilfe der konformen Abbildung (22) läßt sich das gesuchte Potential in bekannter Weise angeben. Es ist mit den Bezeichnungen der Abb. 3

$$\left.\begin{aligned} \varphi_4 &= \frac{\Gamma}{2\pi}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \frac{\Gamma}{2\pi}\psi \\ &\text{oder} \\ w_4 &= \varphi_4 + i\,\psi_4 = -\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\ln\frac{Z - X}{Z - X_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

mit

$$X X_1 = b^2, \quad X = x + \sqrt{x^2 - b^2} \quad \ldots \quad (22a).$$

(Dabei ist von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die Größe von Γ durch die konforme Abbildung (22) nicht geändert wird.) Haben wir nicht nur einen einzigen Wirbelfaden, sondern eine sich von $x = b$ bis $x = x_0$ auf der x-Achse erstreckende Wirbelschicht mit der Zirkulation $\Gamma = u(x)\,d\,x$, so wird

$$\varphi_4 = \frac{1}{2\pi}\int_b^{x_0} \psi\, u(x)\, d\,x \quad \text{und} \quad w_4 = -\frac{i}{2\pi}\int_b^{x_0} \ln\frac{Z - X}{Z - X_1}\cdot u(x)\, d\,x \quad \ldots \quad (23a).$$

Die Zirkulation um den Flügel ist jetzt $-\int_b^{x_0} u(x)\,d\,x$. Für $\mathfrak{v}_4 = \overline{\dfrac{d\,w_4}{d\,z}}$ ist die Bedingung (1) erfüllt, weil die Gesamtzirkulation der Wirbel (die alle im Endlichen liegen) Null ist.

IV. Die Bedingung für endliche Strömungsgeschwindigkeit an der Hinterkante des Flügels.

Der allgemein vorgegebene Bewegungszustand des Flügels ist bestimmt durch die Komponenten $\mathfrak{V}(V_x, V_y)$, ω_1, $\omega_2 = \frac{d\gamma}{d\tau}$. Die Strömung um den Flügel soll nun so bestimmt werden, daß ihre Geschwindigkeit an der Hinterkante des Flügels (Hinterkante des Querruders) endlich ist (die Hinterkante ist auf Grund der konformen Abbildung (4) gegeben durch $t = t_1$, vgl. auch (7)). Diese Bedingung muß gestellt werden, damit wir glatten Abfluß von der Hinterkante erhalten. Unsere Bedingung muß also lauten

$$\mathfrak{v}_{t=t_1} = \overline{\left(\frac{d w_1}{d z} + \frac{d w_2}{d z} + \frac{d w_3}{d z} + \frac{d w_4}{d z}\right)_{t=t_1}} = \text{endlich},$$

wo z die Variable der Abb. 1 bedeutet. Nachdem aber für $t = t_1$ sich $\frac{d z'}{d z} = \infty$ ergibt, können wir die Bedingung auch schreiben

$$\left(\frac{d w_1}{d z'} + \frac{d w_2}{d z'} + \frac{d w_3}{d z'} + \frac{d w_4}{d z'}\right)_{t=t_1} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Nach Abschnitt III, 4 darf $\gamma = 0$ gesetzt werden bei der Berechnung von $\frac{d w_2}{d z'}$, $\frac{d w_3}{d z'}$, $\frac{d w_4}{d z'}$; w_1, w_2, w_3 sind nach (13), (19) und (21) als Funktionen von z' bekannt. Ferner ist nach (4), (7), (22) und (23) für $\gamma = 0$

$$\left(\frac{d w_4}{d z'}\right)_{t=t_1} = \left(\frac{d w_4}{d Z} \cdot \frac{d Z}{d z'}\right)_{Z=b} = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\, \Gamma\, i\, \frac{l}{2}\, e^{i\mu\pi}$$

(dabei ist zu beachten, daß das z der Gl. (4) sich von dem z der Gl. (22) durch die additive Konstante $b \cos \mu\pi$ unterscheidet). Es ergibt sich so für (24), wenn wir noch durch den belanglosen von Null verschiedenen Faktor $i\frac{l}{2}e^{i\mu\pi}$ dividieren, in „erster Näherung“

$$V_y - \frac{g_0}{4} V_x \gamma - \frac{g_1 l}{4}\omega_1 + \frac{g_2 l}{4}\omega_2 + \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\, \Gamma = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24\text{a}).$$

Für eine Wirbelschicht ergibt sich entsprechend

$$V_y - \frac{g_0}{4} V_x \gamma - \frac{g_1 l}{4}\omega_1 + \frac{g_2 l}{4}\omega_2 + \frac{1}{\pi l}\int_b^{x_0}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\, u(x)\, dx = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24\text{b}).$$

g_0, g_1, g_2 sind Funktionen von $\mu\pi$ und sind in Abschnitt VII angegeben. Wir führen zur Abkürzung ein

$$V_y^* = -\frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\, \Gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25),$$

bzw.

$$V_y^* = -\frac{1}{\pi l}\int_b^{x_0}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\, u(x)\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25\text{a}).$$

Eine elementare Betrachtung zeigt, daß V_y^* diejenige Geschwindigkeit ist, welche die Wirbel (Γ bzw. $u(x)\,dx$) für die auf die Z-Ebene abgebildete Strömung (Abb. 3) an der Stelle $Z = b$ hervorrufen. Die Bedingung (24a) und (24b) besagt, daß die Strömungsgeschwindigkeit der auf die Z-Ebene transformierten Strömung für denjenigen Punkt Null ist, welcher der Hinterkante des Flügels entspricht. Die Bedingung endlicher Geschwindigkeit läßt sich durch entsprechende Wahl von $u(x)$ immer erfüllen.

(Für den Fall, daß der Wirbel Γ im Unendlichen liegt, erhält man aus (24a)

$$V_y - \frac{g_0}{4} V_x \gamma - \frac{g_1 l}{4}\omega_1 + \frac{g_2 l}{4}\omega_2 + \frac{\Gamma}{\pi l} = 0,$$

speziell für stationäre Strömung ($\omega_1 = \omega_2 = 0$)

$$\left(V_y - \frac{g_0}{4} V_x \gamma\right)\pi l = -\Gamma.$$

Dieselbe Bedingung erhält man aber auch, wenn man für die stationäre Strömung um den Flügel durch Einführung einer Zirkulation $-\Gamma$ um den Flügel die Bedingung endlicher Strömungsgeschwindigkeit an der Hinterkante erfüllt; vgl. dazu die vorhergehende Arbeit von C. Schmieden Gl. (13). Für die entstehende Strömung ist dann (1) nicht mehr erfüllt, da der Gegenwirbel $(+\Gamma)$ ins Unendliche gerückt ist.)

V. Berechnung der Kraft auf den ganzen Flügel.

(Für kleine Ruderausschläge γ.)

Gesucht ist nach (2) und (3)

$$\mathfrak{P} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int_{F+F'} \varphi \, d\mathfrak{f} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int_{F+F'} \varphi \, [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] .$$

Entsprechend der Zerlegung des Potentials in $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ werden wir je vier Teilintegrale erhalten. Wir berechnen zunächst

$$\mathfrak{K} = \int_{F+F'} \varphi \, d\mathfrak{f} \quad \text{und} \quad M = \int_{F+F'} \varphi \, [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

F' ist irgendeine Fläche, hier beim ebenen Problem eine Gerade, welche die Ebene einfach zusammenhängend macht. Zu jedem abgelösten Wirbel (Wirbelfaden) gehört eine solche Fläche F'. Wir wählen sie speziell so, daß durch sie der betreffende Wirbel (Γ) vom betrachteten Flüssigkeitsraum ausgeschieden wird (Abb. 4).

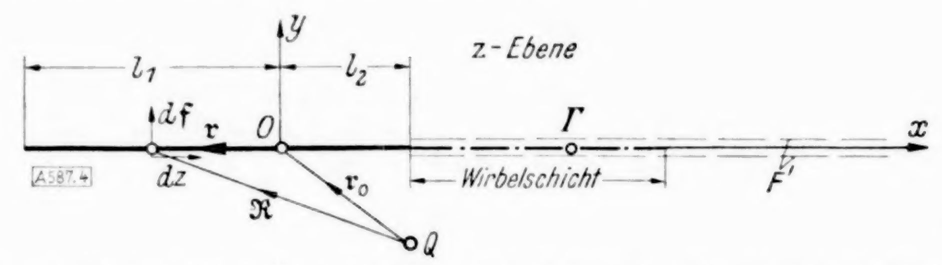


Abb. 4. Zur Berechnung der Teilintegrale für die Kräfte und Momente. Der Flügel mit Wirbelschicht und Fläche F'.

φ_1, φ_2 und φ_3 sind längs F' überall eindeutig; daher ist

$$\int_{F'} \varphi_\nu \, d\mathfrak{f} = 0 ; \quad \int_{F'} \varphi_\nu [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Nach (26) und (27) ist dann noch zu berechnen

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_F \varphi_\nu \, d\mathfrak{f} ; \quad M_\nu = \int_F \varphi_\nu [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_4 = \int_{F+F'} \varphi_4 \, d\mathfrak{f} ; \quad M_4 = \int_{F+F'} \varphi_4 [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad \ldots \quad (28).$$

Die vektoriellen Integrale (28) wollen wir mit Hilfe der komplexen Bezeichnungsweise umschreiben. Es ist (Abb. 4)

$$d\mathfrak{f} = i \cdot dz \cdot 1 ; \quad [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = \bar{z} \cdot dz \cdot 1$$

(x-Achse, y-Achse und positives $\bar{z}\,dz$ bilden ein Rechtssystem). Ferner nach (13), und wenn wir $z = |z| \cdot e^{i\varkappa}$ schreiben:

$$\int_F \varphi_1 \, i \, dz = - V \int_F |z| \cdot \sin(\varkappa - \beta) \, i \, dz .$$

Das Integral der rechten Seite ist aber Null, auf Grund der einfachen Form unseres Flügels. Wir erhalten daher

$$\mathfrak{K}_1 = \int_F \varphi_1 \, i \, dz = \int_F w_1 \, i \, dz .$$

Nach analogen Überlegungen ist

$$M_1 = \int_F \varphi_1 \, \bar{z} \, dz = \int_F w_1 \, \bar{z} \, dz .$$

Ebenso für φ_2 und φ_3; also

$$\mathfrak{K}_\nu = \int_F w_\nu \, i \, dz ; \quad M_\nu = \int_F w_\nu \, i \, dz \quad (\nu = 1, 2, 3) .$$

Diese Integrale lassen sich nun durch Integration im Komplexen auswerten. Dieses soll an zwei Beispielen ($\mathfrak{K}_3$ und M_3) gezeigt werden. Die Berechnung von $\mathfrak{K}_4$ und M_4 ist bereits von H. Wagner (Anm. 2) ausgeführt worden, dessen Ergebnis wir einfach übernehmen wollen. Wir werden jedoch in Abschnitt VI $-\varrho \frac{d}{d\tau}(\mathfrak{K}_4)$ und $-\varrho \frac{d}{d\tau}(M_4)$ nach anderer Methode noch einmal berechnen.

1. Berechnung von $\mathfrak{K}_3$. Nach Abb. 2 können wir schreiben

$$\mathfrak{K}_3=\int_F w_3\, i\, d z=\int_{+\infty}^{-\infty} w_3\, i \frac{d z}{d t} d t=\oint_{|z'|=1} w_3\, i \frac{d z}{d z'} d z'.$$

Es ist am zweckmäßigsten, mit der z'-Variablen zu rechnen. w_3 und $\frac{d z}{d z'}$ sind nach (21) und (7) als Funktionen von z' bekannt. Der letzte Summand in w_3 (21) ergibt nach (4) und (6) als Funktion von t bzw. z

$$-\frac{\omega_2 f^2 l^2 \sin^4 \mu \pi}{2 \sin 2 \gamma} \cdot \frac{t^{2+2\frac{\gamma}{\pi}}}{(t^2-2 t \cos \mu \pi+1)^2}=-\frac{\omega_2}{\sin 2 \gamma} \cdot \frac{z^2}{2} \quad \text{(29).}$$

Das zugehörige Integral über die Oberfläche F des Flügels liefert demnach keinen Beitrag, was für die praktische Berechnung von Vorteil ist. Den Rest des Potentials w_3, der für das Integral einen Beitrag liefert, nennen wir w_3^*. Wir haben dann

$$\mathfrak{K}_3=\oint_{|z'|=1} w_3^* \frac{d z}{d z'} d z'=-2 \pi i\, \Re\text{ef}\,(z'=\infty).$$

2. Berechnung von M_3. Nach Abb. 2 ist

$$M_3=\int_F w_3 \bar{z}\, d z=\oint_{|z'|=1} w_3 \bar{z} \frac{d z}{d z'} d z'.$$

Um M_3 wieder durch ein Residuum zu erhalten, betrachten wir zunächst das Integral P_3:

$$P_3=\int_F w_3 z\, d z=\oint_{|z'|=1} w_3 z \frac{d z}{d z'} d z'.$$

Der letzte Summand in dem Ausdruck für w_3 (21) liefert wie oben keinen Beitrag für das Integral. Der Integrand läßt sich nach (21), (4), (6) und (7) wieder als Funktion von z' schreiben und wir erhalten

$$P_3=\oint_{|z'|=1} w_3 z \frac{d z}{d z'} d z'=-2 \pi i\, \Re\text{ef}\,(z'=\infty) \quad \text{(30).}$$

Der Zusammenhang zwischen P_3 und M_3 ergibt sich (analog wie früher zwischen P_2 und ψ_2, vgl. (18)), wenn wir berücksichtigen, daß bei P_3 unter dem Integral der Faktor $t^{2\frac{\gamma}{\pi}}$ $\left(\text{infolge von } z \cdot \frac{d z}{d z'}\right)$, bei M_3 dagegen nicht auftritt, und wenn wir die Festsetzung $0 \leqq \operatorname{arc} t \leqq \pi$ beachten:

$$P_3=J_{\mathrm{I}} e^{4 i \gamma}+J_{\mathrm{II}} \quad \text{(30a),}$$

$$M_3=J_{\mathrm{I}}+J_{\mathrm{II}} \quad \text{(31),}$$

wobei

$$J_{\mathrm{I}}=\oint_{\substack{z'=e^{-2 i \mu \pi} \\ |z'|=1}}^{z'=1} w_3 \bar{z} \frac{d z}{d z'} d z'=\int_0^{-\infty} w_3 \bar{z} \frac{d z}{d t} d t, \qquad J_{\mathrm{II}}=\oint_{\substack{z'=1 \\ |z'|=1}}^{z'=e^{-2 i \mu \pi}} w_3 \bar{z} \frac{d z}{d z'} d z'=\int_{+\infty}^{0} w_3 \bar{z} \frac{d z}{d t} d t;$$

vgl. dazu (7) und Abb. 2. J_{I} und J_{II} sind reell; beide lassen sich daher aus (30) und (30a) berechnen, und damit ist M_3 nach (31) bekannt.

Nachdem nun die Methode der Berechnung an den zwei Beispielen $\mathfrak{K}_3$ und M_3 vorgeführt wurde, bringen wir das Ergebnis der praktischen Rechnung von (28) in „erster Näherung" und mit Vernachlässigung (Abschn. III, 4) der Produkte kleiner Größen.

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathfrak{K}_1=i \frac{\pi l^2}{4}\left(V_y-g_3 V_x \gamma\right) & M_1=\frac{\pi l^3}{4}\left(-g_4 V_y+g_5 V_x \gamma\right) \\
\mathfrak{K}_2=-i \frac{\pi l^3}{4} g_4 \omega_1 & M_2=\frac{\pi l^4}{4} g_6 \omega_1 \\
\mathfrak{K}_3=i \frac{\pi l^3}{4} g_7 \omega_2 & M_3=-\frac{\pi l^4}{4} g_8 \omega_2
\end{array}\right\} \quad \text{(32).}$$

Die M_ν ($\nu = 1, 2, 3$) sind auf O bezogen. Die Beiwerte g_3 bis g_8 sind Funktionen von $\mu\pi$, d. h. nach (5) Funktionen von λ; sie sind in Abschnitt VII zusammengestellt. Die Werte für $\mathfrak{K}_4$ und M_4 übernehmen wir von H. Wagner (vgl. dort S. 30 bis 34, siehe Anm. 2):

$$\mathfrak{K}_4 = \int\limits_{F+F'} \varphi_4\, d\mathfrak{f} = -i\,\Gamma \sqrt{x^2 - b^2} \qquad M_4 = \int\limits_{F+F'} \varphi_4\,[\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = -\frac{\Gamma}{2}\, x \sqrt{x^2 - b^2} \quad \ldots \quad (33),$$

wobei M_4 auf O' bezogen ist.

Auf Grund der Ausdrücke (32) und (33) lassen sich jetzt (2) und (3) berechnen. Es ist

$$\mathfrak{P} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} \varphi\, d\mathfrak{f} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \sum_{1}^{4} {}^{\nu}\, \mathfrak{K}_\nu \quad \ldots \quad (34),$$

$$\mathfrak{M} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} \varphi\,[\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} [\mathfrak{r}, \varphi\, d\mathfrak{f}] \quad \ldots \quad (35).$$

Wie früher erwähnt, bezieht sich $\mathfrak{r}$ auf einen raumfesten Punkt (Knickpunkt O mit $z = 0$). Wir wählen für den Momentenpunkt vorübergehend einen außerhalb des Flügels gelegenen Punkt Q mit dem Radiusvektor $\mathfrak{R}$ (Abb. 4), und führen die Differentiation in (35) aus:

$$\mathfrak{M} = -\varrho \int\limits_{F+F'} \left[\mathfrak{R}, \frac{d}{d\tau}(\varphi\, d\mathfrak{f})\right] - \varrho \int\limits_{F+F'} \left[\frac{d\,\mathfrak{R}}{d\tau}, \varphi\, d\mathfrak{f}\right] \quad \ldots \quad (35\text{a}).$$

Nun ist aber:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r} \\ \frac{d\,\mathfrak{R}}{d\tau} &= \frac{d\,\mathfrak{r}_0}{d\tau} + [\vec{\omega}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{V} + [\vec{\omega}, \mathfrak{r}] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

mit

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \vec{\omega}_1 & \text{für den Hauptflügel} \\ \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 & \text{für das Querruder.} \end{cases}$$

$[\vec{\omega}, \mathfrak{r}]$ hat stets die Richtung von $d\mathfrak{f}$, so daß der zweite Bestandteil von (36) keinen Beitrag zum zweiten Integral der rechten Seite von (35a) liefert. Lassen wir Q nach O rücken ($\mathfrak{r}_0 = 0$), so wird mit (28), (36) und (35a)

$$\mathfrak{M} = -\varrho \frac{d}{d\tau} \sum_{1}^{4} {}^{\nu}\, M_\nu - \varrho \left[\mathfrak{V}, \overrightarrow{\sum_{1}^{4} {}^{\nu}\, \mathfrak{K}_\nu}\right] \quad \ldots \quad (35\text{b}).$$

Die Zeitabhängigkeit von $\mathfrak{K}_4$ und M_4 in (33) ist durch x gegeben, wenn wir beachten, daß die Wirbel im Raume ruhen und das x, y-Koordinatensystem der Abb. 3 mit dem Flügel fest verbunden ist. Es gilt $\frac{dx}{d\tau} = -V_x$ (= Relativgeschwindigkeit der Wirbel bezüglich des mit dem Flügel fest verbundenen x, y-Systems). Wir erhalten so speziell für die Kraft $\mathfrak{P}_4$, die von φ_4 herrührt nach (33)

$$\mathfrak{P}_4 = -\varrho \frac{d}{d\tau} \mathfrak{K}_4 = -i\,\varrho\, V_x\, \Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}.$$

Dafür können wir unter Benutzung der Identität

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} + \frac{b}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad \ldots \quad (37)$$

und nach (25) schreiben

$$\mathfrak{P}_4 = i\,\varrho\, V_x \cdot 2\pi b\, V_y^* + i\,\varrho\, V_x\, b \frac{\Gamma}{\sqrt{x^2 - b^2}}.$$

Für das zugehörige Moment haben wir entsprechend nach (33) und (35b)

$$\mathfrak{M}_4 = -\varrho \frac{d}{d\tau} M_4 - \varrho\, V_x \left(-\Gamma \sqrt{x^2 - b^2}\right)$$

$$= -\varrho\, V_x\, b^2 \frac{\Gamma}{2\sqrt{x^2 - b^2}} \qquad \text{(bezogen auf } O'\text{!).}$$

für eine Wirbelschicht, die sich mit der Stärke $\Gamma = u(x)\,dx$ von $x = b$ bis $x = x_0$ auf der x-Achse erstreckt, muß noch nach x integriert werden. Dies liefert

$$\mathfrak{P}_4 = i\,\varrho\,V_x \cdot 2\,\pi\,b\,V_y^* + i\,\varrho\,V_x\,b \int_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}$$

$$\mathfrak{M}_4 = -\frac{\varrho\,V_x\,b^2}{2} \int_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}\,.$$

Die praktische Berechnung von (34) und (35) ergibt unter Berücksichtigung der in Abschnitt III, 4 angegebenen Größenordnungen mit Vernachlässigung der Produkte kleiner Größen, wobei für V_y^* nach (24b) und (25)

$$V_y^* = V_y - \frac{g_0}{4}\,V_x\,\gamma - \frac{g_1\,l}{4}\,\omega_1 + \frac{g_2\,l}{4}\,\omega_2$$

eingesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} = i\,\frac{\varrho\,\pi\,l}{4}\Big[&-l\,\frac{d\,V_y}{d\,\tau} + 4\,V_x\,V_y - G_1\,V_x^2\,\gamma + G_2\,l^2\,\frac{d\,\omega_1}{d\,\tau} - G_3\,l\,V_x\,\omega_1 \\ &- G_4\,l^2\,\frac{d\,\omega_2}{d\,\tau} + G_5\,l\,V_x\,\omega_2 + \frac{2}{\pi}\,V_x \int_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - b^2}}\Big]\,.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (38),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\varrho\,\pi\,l^2}{4}\left[-\frac{l}{4}\,\frac{d\,V_y}{d\,\tau} - G_6\,V_x^2\,\gamma + G_7\,l^2\,\frac{d\,\omega_1}{d\,\tau} + \frac{l}{4}\,V_x\,\omega_1 - G_8\,l^2\,\frac{d\,\omega_2}{d\,\tau} + G_9\,l\,V_x\,\omega_2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Dabei ist das Moment $\mathfrak{M}$ auf den in drei Viertel der Flügeltiefe l vor der Hinterkante gelegenen Punkt P_v bezogen (s. Abb. 5). Die Beiwerte G_1 bis G_9 sind Funktionen von $\mu\,\pi$ (bzw. λ) und sind in Abschnitt VII zusammengestellt. Die Kraft $\mathfrak{P}$ erscheint als reine Auftriebskraft (Faktor i!).

VI. Berechnung der Kraft auf das Querruder.

(Für kleine Ruderausschläge γ.)

Für die praktische Verwendung interessiert nicht nur Kraft und Moment auf den ganzen Flügel, sondern auch Kraft $\mathfrak{P}_R$ und Moment $\mathfrak{M}_R$ für das Querruder R. Für $\mathfrak{P}_R$ und $\mathfrak{M}_R$ können wir nicht die Beziehungen (2) und (3) benutzen, da diese nur für einen ganzen Körper gelten. Zur Aufstellung einer Formel für $\mathfrak{P}_R$ und $\mathfrak{M}_R$ gehen wir daher direkt von der Bernoullischen Gleichung für instationäre Potentialströmung aus:

$$p = -\frac{\varrho}{2}\,\mathfrak{v}^2 - \varrho\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau} + C(\tau)\,.$$

Gesucht ist, wenn F_R die Oberfläche des Querruders bedeutet:

$$\mathfrak{P}_R = \int_{F_R} p\,d\mathfrak{f} = -\frac{\varrho}{2}\int_{F_R} \mathfrak{v}^2\,d\mathfrak{f} - \varrho \int_{F_R} \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau}\,d\mathfrak{f}; \quad \left(\int_{F_R} C(\tau)\,d\mathfrak{f} = 0\right).$$

Wir führen die zeitliche Änderung des Potentials in bezug auf das mit dem Flügel fest verbundene x, y-System ein $\left(\left\{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau}\right\}_R\right)$ und erhalten

$$\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau} = \left\{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau}\right\}_R - (\mathfrak{V}_R, \nabla)\,\varphi = \left\{\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\tau}\right\}_R - (\mathfrak{V}_R, \mathfrak{v})\,,$$

wobei

$$\mathfrak{V}_R = \mathfrak{V} + [\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \mathfrak{r}]$$

die Geschwindigkeit eines Punktes von R ist, dessen Lage vom Punkt O aus durch den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt ist. Es wird dann nach einer weiteren Umformung

$$\mathfrak{P}_R = -\varrho\left\{\frac{\partial}{\partial\,\tau}\int_{F_R} \varphi\,d\mathfrak{f}\right\}_R + \varrho\int_{F_R} (\mathfrak{V}_R, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{f} - \frac{\varrho}{2}\int_{F_R} \mathfrak{v}^2\,d\mathfrak{f} + \varrho\int_{F_R} \varphi\left\{\frac{\partial}{\partial\,\tau}\,d\mathfrak{f}\right\}_R \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Die beiden letzten Integrale der rechten Seite machen für die Berechnung Schwierigkeiten, da sie in φ quadratisch sind $\left(\left\{\frac{\partial}{\partial \tau} d\mathfrak{f}\right\}_R = [\overrightarrow{\omega_2}, d\mathfrak{f}]\right)$. Um hier mit möglichst wenig Rechenaufwand weiterzukommen, benutzen wir die Voraussetzungen, die auch bei der Aufstellung der Formeln (38) und (39) gemacht wurden (vgl. Abschnitt III, 4). Es ist ersichtlich, daß dann die beiden in φ quadratischen Integrale zu vernachlässigen sind, weil in ihnen die Produkte der als klein vorausgesetzten Bewegungskomponenten vorkommen[16]). Das Symbol $\left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\right\}_R$ ist gleichwertig dem in den Formeln (2) und (3) auftretenden $\frac{d}{d\tau}$. Wir erhalten so aus (40), wenn wir noch für $(\mathfrak{V}_R, \mathfrak{v})$ bis auf Vernachlässigung der Produkte kleiner Bewegungskomponenten (Abschnitt III, 4) $V_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ schreiben,

$$\mathfrak{P}_R = -\varrho \frac{d}{d\tau}\int\limits_{F_R} \varphi\, d\mathfrak{f} + \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\mathfrak{f} \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

Analog zeigt man für das Moment

$$\mathfrak{M}_R = -\varrho \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\substack{F_R \\ \mathfrak{r}=\text{konst.}}} [\mathfrak{r}, \varphi\, d\mathfrak{f}] + \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi}{\partial x} [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad \ldots \ldots \quad (42).$$

Es ist wie früher $d\mathfrak{f} = i \cdot dz \cdot 1$; $[\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = \bar{z} \cdot dz \cdot 1$. Für den ersten Summanden von (41) bzw. (42) erhalten wir wieder (zunächst ohne Differentiation nach der Zeit) entsprechend der Aufteilung von φ je vier Teilintegrale:

$$\mathfrak{K}_{\nu R} = \int\limits_{F_R} \varphi_\nu\, d\mathfrak{f} \quad \text{bzw.} \quad M_{\nu R} = \int\limits_{F_R} \varphi_\nu [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \ldots \quad (43).$$

Für den zweiten Summanden von (41) bzw. (42) erhalten wir

$$\mathfrak{K}^*_{\nu R} = \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} d\mathfrak{f} \quad \text{bzw.} \quad M^*_{\nu R} = \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \quad (44).$$

$\mathfrak{K}^*_{\nu R}$ können wir noch umformen. Es ist nämlich, wenn $w_\nu = \varphi_\nu + i\psi_\nu$ eines der vier komplexen Teilpotentiale bedeutet,

$$i\int\limits_{F_R} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x} d\mathfrak{f} = 0\,,$$

also

$$\varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} d\mathfrak{f} = \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{d w_\nu}{d z} i\, dz = i\, \varrho\, V_x \Big\{w_\nu\Big\}_{t=0}^{t=-\infty} \quad \ldots \ldots \quad (44\,\text{a})$$

(wenn t von 0 bis $-\infty$ läuft, dann wird die Oberfläche F_R des Querruders durchlaufen, vgl. (4)). Für $M^*_{\nu R}$ in (44) ergibt sich entsprechend

$$\varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} \frac{d w_\nu}{d z} z\, dz = \varrho\, V_x \Big\{w_\nu z\Big\}_{t=0}^{t=-\infty} - \varrho\, V_x \int\limits_{F_R} w_\nu\, dz \quad \ldots \quad (44\,\text{b}).$$

$\int\limits_{F_R} w_\nu\, dz$ ist die y-Komponente von $\int\limits_{F_R} \varphi_\nu\, d\mathfrak{f}$. Die übrigen Ausdrücke in (44a) und (44b) sind bekannt. Für die Berechnung von $\mathfrak{P}_R$ und $\mathfrak{M}_R$ zerlegen wir diese nach den vier Teilpotentialen unter Verwendung von (41), (42), (43) und (44):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\nu R} &= -\varrho \frac{d}{d\tau} \mathfrak{K}_{\nu R} + \mathfrak{K}^*_{\nu R} \\ \mathfrak{M}_{\nu R} &= -\varrho \frac{d}{d\tau} M_{\nu R} + M^*_{\nu R} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Die Methode der Berechnung wird für φ_3 (Berechnung $\mathfrak{K}_{3R}$ und M_{3R}) und φ_4 (Berechnung von $\mathfrak{P}_{4R}$ und $\mathfrak{M}_{4R}$) näher ausgeführt.

[16]) Die an der Vorderkante des Flügels (infolge der dort herrschenden unendlich großen Strömungsgeschwindigkeit) wirkende Saugkraft ist auch zu vernachlässigen, da sie von zweiter Ordnung klein ist.

1. Berechnung von $\mathfrak{K}_{3R}$. Nach Abb. 3 können wir schreiben

$$\mathfrak{K}_{3R} = \int\limits_{FR} \varphi_3\, d\mathfrak{f} = \int\limits_{FR} w_3\, i\, dz = \int\limits_{\substack{0\\ \mathrm{arc}\,t=\pi}}^{-\infty} w_3\, i\, \frac{dz}{dt}\, dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (46).$$

Der letzte Summand von w_3 liefert keinen Beitrag zu dem Integral (vgl. (29)). Den Rest von w_3, der zu dem Integral einen Beitrag liefert, nennen wir wieder w_3^*. Wir wollen (46) durch komplexe Integration erhalten und betrachten deshalb zunächst das Integral P_4

$$P_4 = \oint w_3^*\, i\, \frac{dz}{dt}\, dt = \int\limits_{\substack{-\infty\\ \mathrm{arc}\,t=-\pi}}^{0} w_3^*\, i\, \frac{dz}{dt}\, dt + \int\limits_{\substack{0\\ \mathrm{arc}\,t=+\pi}}^{-\infty} w_3^*\, i\, \frac{dz}{dt}\, dt \quad \ldots \ldots \ldots (47).$$

Der Integrand $w_3^*\, i\, \frac{dz}{dt}$ ist durch die Festsetzung $-\pi \leqq \mathrm{arc}\, t \leqq +\pi$ eine in der ganzen t-Ebene analytische Funktion von t (mit Ausnahme der negativen reellen Achse der t-Ebene). Man zeigt leicht unter Benutzung von (21), (6) und (7), daß der Integrand für $t \to \infty$ sich verhält wie $\frac{1}{|t|^{2-\frac{\gamma}{\pi}}}$. P_4 läßt sich daher durch ein Umlaufintegral ersetzen. Der Zusammenhang zwischen P_4 und $\mathfrak{K}_{3R}$ ist durch die Definition von $\mathrm{arc}\, t$ gegeben. Es ist

$$P_4 = \mathfrak{K}_{3R}\, e^{i\gamma} - \mathfrak{K}_{3R}\, e^{-i\gamma} \text{ [17]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47\,\mathrm{a}).$$

Andererseits ist

$$P_4 = -2\pi i\, [\mathfrak{Res}\,(t = e^{i\mu\pi}) + \mathfrak{Res}\,(t = e^{-i\mu\pi})] \quad \ldots \ldots \ldots (47\,\mathrm{b}).$$

Am einfachsten wird die Berechnung, wenn man mit der z'-Variablen rechnet. Es wird dann nach (47a) und (47b)

$$P_4 = \mathfrak{K}_{3R}\, 2\, i \sin\gamma = -2\pi i\, [\mathfrak{Res}\,(z' = \infty) + \mathfrak{Res}\,(z' = 0)]\,.$$

Hier sind die Residuen für den Integranden $w_3^*\, i\, \frac{dz}{dz'}$ zu berechnen, der nach (7) und (21) als Funktion von z' bekannt ist. Die Zusammenhangsverhältnisse ergeben sich aus Abb. 2; dort ist der Integrationsweg für P_4 in der z'-Ebene und in der t-Ebene durch Pfeile angedeutet. Die beiden Residuen sind konjugiert imaginär, so daß sich für P_4 ergibt

$$P_4 = -2\pi i \cdot 2\, \Re e\, \{\mathfrak{Res}\,(z' = \infty)\}\,.$$

$\mathfrak{Res}\,(z' = \infty)$ ist nach dem früheren (Abschnitt V, 1) bekannt. Nun wird schließlich

$$\mathfrak{K}_{3R} = \frac{P_4}{2\, i \sin\gamma} = -\frac{2\pi}{\sin\gamma}\, \Re e\, \{\mathfrak{Res}\,(z' = \infty)\}\,.$$

2. Berechnung von M_{3R}. Es ist zu ermitteln

$$M_{3R} = \int\limits_{FR} w_3^*\, \bar{z}\, dz\,.$$

Die Berechnungsmethode geht analog wie früher (vgl. Abschn. VI, 1). Wir betrachten zunächst das Integral P_5

$$P_5 = \oint w_3^*\, z\, \frac{dz}{dt}\, dt \quad \text{mit} \quad -\pi \leqq \mathrm{arc}\, t \leqq +\pi\,.$$

Der Zusammenhang mit M_{3R} ist

$$P_5 = M_{3R}\, e^{2i\gamma} - M_{3R}\, e^{-2i\gamma}.$$

P_5 läßt sich wieder als komplexes Integral auswerten am besten mit Benutzung der z'-Variablen

$$P_5 = -2\pi i\, [\mathfrak{Res}\,(z' = \infty) + \mathfrak{Res}\,(z' = 0)]$$

mit dem Integranden $w_3^*\, z\, \frac{dz}{dz'}$. Auch hier sind die beiden Residuen konjugiert imaginär, so

[17]) Dieser Kunstgriff der Berechnung von $\mathfrak{K}_{3R}$ aus P_4 wurde von Herrn von Borbely vorgeschlagen.

daß der Wert von P_5 nach unseren früheren Berechnungen (Abschnitt V, 2) bekannt ist, nämlich

$$P_5 = -2\pi i \cdot 2\,\Re e\{\Re e \mathfrak{f}(z' = \infty)\}$$

und

$$M_{3R} = \frac{P_5}{2i\sin 2\gamma} = -\frac{2\pi}{\sin 2\gamma}\Re e\{\Re e \mathfrak{f}(z' = \infty)\}.$$

3. Berechnung von $\mathfrak{P}_{4R}$. Gesucht ist zunächst

$$\mathfrak{K}_{4R} = \int_{F_R} \varphi_4\, d\mathfrak{f} = \int_{F_R} \varphi_4\, i\, dz \quad . . . . (48).$$

z sei hier die z-Variable der Abb. 3. Unter Benutzung der unter Abschnitt III, 4 erhaltenen Beziehungen ergibt sich speziell für die Berandung (Oberfläche F_R) des Querruders

$$Z = b\, e^{i\vartheta}; \quad z = b\cos\vartheta; \quad dz = -b\sin\vartheta\, d\vartheta; \quad |\vartheta| \leq \vartheta_0.$$

Für einen einzelnen Wirbelfaden im Abstand x von der Mitte O' des Flügels haben wir dann für (48)

$$\mathfrak{K}_{4R} = -i\, b\frac{\Gamma}{2\pi}\int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0} \psi\sin\vartheta\, d\vartheta = -i\, b\frac{\Gamma}{\pi}\int_0^{\vartheta_0}\psi\sin\vartheta\, d\vartheta - i\, b\frac{\Gamma}{2\pi}\int_{-\vartheta_0}^{0} 2\pi\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

wobei

$$\psi = \operatorname{arc}\cos\frac{b - x\cos\vartheta}{x - b\cos\vartheta}.$$

(Bezüglich der neu auftretenden Bezeichnungen siehe Abb. 3.) Es ist praktischer, nach ψ zu integrieren:

$$\mathfrak{K}_{4R} = \frac{i\,\Gamma k (X - X_1)^2}{2\pi X}\int_{\pi}^{\psi_0}\frac{\psi\sin\psi\, d\psi}{(1 + k^2 - 2k\cos\psi)^2} + i\, b\,\Gamma(1 - \cos\vartheta_0) \quad \text{mit } k = \frac{b}{X}.$$

Nach Integration und weiterer Vereinfachung unter Benutzung von (22a) ergibt sich

$$\mathfrak{K}_{4R} = i\frac{\Gamma}{\pi}\left[(\pi - \psi_0)(x - b\cos\vartheta_0) - \vartheta_0\sqrt{x^2 - b^2}\right] \quad . . . . (48a).$$

Nun ist $O'O = b\cos\vartheta_0$ oder nach (5) $O'O = b\cos\mu\pi$, also $\vartheta_0 = \mu\pi$. Ferner ist ψ_0 gegeben durch

$$\cos\psi_0 = \frac{b - x\cos\mu\pi}{x - b\cos\mu\pi} \quad . . . . (49),$$

so daß (48a) ergibt

$$\mathfrak{K}_{4R} = i\frac{\Gamma}{\pi}\left[\left(\pi - \operatorname{arc}\cos\frac{b - x\cos\mu\pi}{x - b\cos\mu\pi}\right)(x - b\cos\mu\pi) - \mu\pi\sqrt{x^2 - b^2}\right] \quad . . . . . (48b).$$

Weiter berechnet man nach (44a)

$$\varrho V_x\int_{F_R}\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\, d\mathfrak{f} = i\,\varrho V_x\left\{\varphi_4\right\}_{\psi = 2\pi - \psi_0}^{\psi = \psi_0} = i\frac{\varrho V_x \Gamma}{\pi}(\psi_0 - \pi) \quad . . . . . . (50).$$

Jetzt ergibt sich, wenn nach (45) $\mathfrak{P}_{4R}$ der Bestandteil von $\mathfrak{P}_R$ ist, der von φ_4 herrührt,

$$\mathfrak{P}_{4R} = -\varrho\frac{d}{d\tau}\mathfrak{K}_{4R} + \varrho V_x\int_{F_R}\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}\, d\mathfrak{f} \quad . . . . (51).$$

Die Zeitabhängigkeit von $\mathfrak{K}_{4R}$ ist durch x (und $\psi(x)$) gegeben, wobei wie früher $\frac{dx}{d\tau} = -V_x$ zu beachten ist. Es ergibt sich somit für (51) aus (48b), (49) und (50)

$$\mathfrak{P}_{4R} = -i\frac{\varrho V_x \Gamma}{\pi}\cdot\frac{x\mu\pi + b\sin\mu\pi}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad . . . . (52).$$

(Für $\mu = 1$ ist das Querruder gleich dem ganzen Flügel, und wir erhalten für (52) in Übereinstimmung mit H. Wagner (vgl. dort S. 30, siehe Anm. 2)

$$\mathfrak{P}_{4R} = \mathfrak{P}_4 = -\varrho\frac{d}{d\tau}\int_{F+F'}\varphi_4\, d\mathfrak{f} = -i\,\varrho V_x\Gamma\frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}.)$$

Die Kraft $\mathfrak{P}_{4R}$ läßt sich mit der Identität (37) und nach (25) umformen:

$$\mathfrak{P}_{4R} = i\,\frac{\varrho\, b\, V_x}{\pi}\left[2\,\pi\,\mu\,\pi\,V_y^* + \frac{(\mu\,\pi - \sin\mu\,\pi)\,\Gamma}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right].$$

Haben wir nicht einen einzelnen Wirbelfaden, sondern eine von $x = b$ bis $x = x_0$ sich erstreckende Wirbelschicht mit der Stärke $\Gamma = u(x)\,d\,x$, so haben wir noch nach x zu integrieren. Wir erhalten so

$$\mathfrak{P}_{4R} = i\,\frac{\varrho\,\pi\,b}{2}\left[g_9\,V_x\,V_y^* + \frac{g_{10}}{2\,\pi}\int\limits_b^{x_0}\frac{u(x)\,d\,x}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right] \quad \text{. . . . . (53)}$$

mit

$$V_y^* = -\frac{1}{2\,\pi\,b}\int\limits_b^{x_0}\sqrt{\frac{x+b}{x-b}}\,u(x)\,d\,x\,.$$

g_9 und g_{10} sind Funktionen von $\mu\,\pi$ und sind in Abschnitt VII angegeben.

4. Berechnung von $\mathfrak{M}_{4R}$. a) Es ist zuerst zu berechnen

$$M_{4R} = \int\limits_{F_R}\varphi_4\,[\mathfrak{r}, d\,\mathfrak{f}] \quad \text{mit} \quad [\mathfrak{r}, d\,\mathfrak{f}] = \bar{z}\,d\,z\,,$$

wenn zunächst O' (Abb. 3) Momentenpunkt ist. Wir erhalten dann für einen einzelnen Wirbelfaden

$$M_{4R} = -\frac{\Gamma\,b^2}{\pi}\int\limits_0^{\mu\pi}\psi\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\,\vartheta - \frac{\Gamma\,b^2}{2\,\pi}\int\limits_{-\mu\pi}^{0}2\,\pi\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\,\vartheta \quad \text{. . . . . (54).}$$

Nach Einführung von ψ als Integrationsveränderliche, Integration und weiterer Vereinfachung unter Benutzung von (22a)

$$M_{4R} = \frac{\Gamma}{2\,\pi}\left[(\pi - \psi_0)\,(x^2 - b^2\cos^2\mu\,\pi) - (x\,\mu\,\pi + b\,\sin\mu\,\pi)\sqrt{x^2 - b^2}\right] \quad \text{. . . (54a).}$$

Nun wird nach (45) mit (54a) und $\frac{d}{d\,\tau} = -V_x\,\frac{d}{d\,x}$

$$-\varrho\,\frac{d}{d\,\tau}\,M_{4R} = \frac{\varrho\,V_x\,\Gamma}{2\,\pi}\left[2\,x\,(\pi - \psi_0) + \frac{b^2\,(\mu\,\pi - \sin\mu\,\pi\,\cos\mu\,\pi) - 2\,x\,(x\,\mu\,\pi + b\,\sin\mu\,\pi)}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right] \quad \text{. (55).}$$

b) Es ist weiter zu berechnen nach (45)

$$M_{4R}^* = \varrho\,V_x\int\limits_{F_R}\frac{\partial\,\varphi_4}{\partial\,x}\,x\,d\,x = \varrho\,V_x\Big\{\varphi_4\,x\Big\}_{t=0}^{t=-\infty} - \varrho\,V_x\int\limits_{F_R}\varphi_4\,d\,x\,.$$

Nachdem der Ursprung des Koordinatensystems für diese Berechnung O' ist, erhalten wir

$$\varrho\,V_x\Big\{\varphi_4\,x\Big\}_{t=0}^{t=\infty} = \frac{\varrho\,b\,V_x\,\Gamma}{\pi}\cos\mu\,\pi\,(\psi_0 - \pi) \quad \text{. . . . . (56).}$$

Ferner ist nach (48b)

$$-\varrho\,V_x\int\limits_{F_R}\varphi_4\,d\,x = -\frac{\varrho\,V_x\,\Gamma}{\pi}\left[(\pi - \psi_0)\,(x - b\cos\mu\,\pi) - \mu\,\pi\sqrt{x^2 - b^2}\right] \quad \text{. . . . (57).}$$

Die Zusammenfassung von a) und b) ergibt so für $\mathfrak{M}_{4R}$ (45), bezogen auf O' aus (55), (56) und (57)

$$\mathfrak{M}_{4R} = -\frac{\varrho\,b\,V_x\,\Gamma}{2\,\pi}\cdot\frac{2\,x\,\sin\mu\,\pi + b\,(\mu\,\pi + \sin\mu\,\pi\,\cos\mu\,\pi)}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad \text{. . . . . . . (58).}$$

(Für $\mu = 1$ erhalten wir wieder das Moment für den ganzen Flügel und in Übereinstimmung mit H. Wagner (vgl. dort S. 33 und 34, siehe Anm. 2)

$$\mathfrak{M}_{4R} = \mathfrak{M}_4 = -\varrho \frac{d}{d\tau} \int\limits_{F+F'} \varphi_4 [\mathfrak{r}, d\mathfrak{f}] = -\varrho V_x b^2 \frac{I}{2\sqrt{x^2-b^2}} .)$$

Für eine Wirbelschicht, die sich mit der Zirkulation $\Gamma = u(x)\,dx$ von $x = b$ bis $x = x_0$ erstreckt, ergibt sich mit (37), wenn wir noch unter Benutzung von $O'O = b\cos\mu\pi$ und (53) das Moment auf O beziehen:

$$\mathfrak{M}_{4R} = \varrho\pi b^2 \left[g_{11} V_x V_y^* + \frac{g_{12}}{2\pi} V_x \int\limits_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2-b^2}} \right] \qquad (58\text{a}).$$

g_{11} und g_{12} (Funktionen von $\mu\pi$) sind in Abschnitt VII angegeben.

Wir geben jetzt zusammenfassend das Ergebnis der praktischen Berechnung von (43) und (44) in „erster Näherung" und mit Vernachlässigungen nach Abschnitt III, 4:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_{1R} = i\frac{\pi l^2}{4}[g_3 V_y - g_{13} V_x \gamma]; && \mathfrak{K}^*_{1R} = i\frac{\varrho\pi l}{4}[-g_{14} V_x V_y + g_{15} V_x^2 \gamma];\\
&M_{1R} = \frac{\pi l^3}{4}[g_7 V_y - g_{16} V_x \gamma]; && M^*_{1R} = \frac{\varrho\pi l^2}{4}[-g_3 V_x V_y + g_{13} V_x^2 \gamma];\\
&\mathfrak{K}_{2R} = -i\frac{\pi l^3}{4} g_5 \omega_1; && \mathfrak{K}^*_{2R} = i\frac{\varrho\pi l^2}{4} g_{17} V_x \omega_1;\\
&M_{2R} = -\frac{\pi l^4}{4} g_{18} \omega_1; && M^*_{2R} = \frac{\varrho\pi l^3}{4} g_5 V_x \omega_1;\\
&\mathfrak{K}_{3R} = i\frac{\pi l^3}{4} g_{16} \omega_2; && \mathfrak{K}^*_{3R} = -i\frac{\varrho\pi l^2}{4} g_{19} V_x \omega_2;\\
&M_{3R} = \frac{\pi l^4}{4} g_{20} \omega_2; && M^*_{3R} = -\frac{\varrho\pi l^3}{4} g_{16} V_x \omega_2;\\
&\mathfrak{K}_{4R} = i\frac{\Gamma}{\pi}[(\pi-\psi_0)(x - b\cos\mu\pi) - \mu\pi\sqrt{x^2-b^2}]; && \mathfrak{K}^*_{4R} = i\frac{\varrho V_x \Gamma}{\pi}[\psi_0 - \pi];\\
&M_{4R} = \frac{\Gamma}{2\pi}[(\pi-\psi_0)(x^2 - b^2\cos^2\mu\pi) - (x\mu\pi + b\sin\mu\pi)\sqrt{x^2-b^2}];\\
&M^*_{4R} = \frac{\varrho V_x \Gamma}{\pi}[x(\psi_0-\pi) + \mu\pi\sqrt{x^2-b^2}].
\end{aligned}\right\} \qquad (59).$$

Die $M_{\nu R}$ und $M^*_{\nu R}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ sind auf O, M_{4R} und M^*_{4R} auf O' bezogen. Die Beiwerte g_3 bis g_{20} sind Funktionen von $\mu\pi$ und nach (5) also Funktionen von λ. Sie sind in Abschnitt VII zusammengestellt.

Mit (59) ergibt sich jetzt für (41), wobei für V_y^* nach (24b) und (25)

$$V_y^* = V_y - \frac{g_0}{4} V_x \gamma - \frac{g_1 l}{4}\omega_1 + \frac{g_2 l}{4}\omega_2$$

gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_R = i\frac{\varrho\pi l}{4}\Bigg[& -G_{10} l \frac{dV_y}{d\tau} + G_{11} V_x V_y - G_{12} V_x^2 \gamma + G_{13} l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} + G_{14} l V_x \omega_1\\
& - G_{15} l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} + G_{16} l V_x \omega_2 + \frac{G_{11}}{2\pi} V_x \int\limits_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2-b^2}}\Bigg]
\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

und für (42) bezogen auf O

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_R = \frac{\varrho\pi l^2}{4}\Bigg[& -G_4 l \frac{dV_y}{d\tau} + G_{17} V_x V_y - G_{18} V_x^2 \gamma + G_{19} l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} + G_{20} l V_x \omega_1\\
& - G_{21} l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} + G_{22} l V_x \omega_2 + \frac{G_{17}}{2\pi} V_x \int\limits_b^{x_0} \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{x^2-b^2}}\Bigg]
\end{aligned}\right\} \qquad (61).$$

Die Beiwerte G_{10} bis G_{22} sind in Abschnitt VII zusammengestellt.

VII. Ergebnis.

Bevor wir die endgültigen Formeln bringen, wollen wir für die Ausbildung der Unstetigkeit hinter dem Flügel andere Koordinaten einführen (Abb. 5) (vgl. auch H. Wagner S. 21, siehe Anm. 2). Der Flügel habe sich von der Ruhe aus von s_0 bis s bewegt. Die Wirbel,

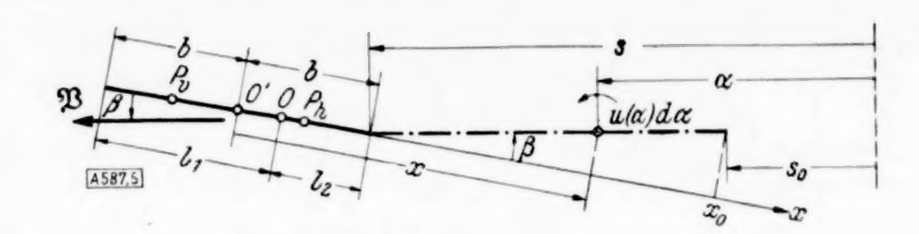


Abb. 5. Einführung der Koordinate a für die Ausbildung der Unstetigkeit $u(x)$ hinter dem Flügel.

die gebildet wurden und im Raume ruhen, seien durch die Koordinate a in ihrer Lage festgelegt. Es ist dann, wenn wir beachten, daß der Anstellwinkel β klein vorausgesetzt wurde ($x \cos\beta = x!$) $x = s - a + b$ (s und a nach links positiv gezählt). Unsere Bedingung (25a) für die Stärke der gebildeten Wirbel wird dann mit der Flügeltiefe $l = 2b$

$$V_y^* = -\frac{1}{\pi l}\int_{s_0}^{s} \frac{\sqrt{l + s - a}}{\sqrt{s - a}}\, u(a)\, d a \quad \text{. . . . . (62)}$$

($u(a)$ entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gezählt). $u(a)$ ist durch die Integralgleichung (62) bestimmt; V_y^* und damit nach (24b) und (25a) $V_y, \gamma, \omega_1, \omega_2$ müssen als Funktionen von s gegeben sein.

Das Endergebnis wird jetzt nach (38), (39), (60), (61) (mit $V_x = -V$, $V_y = -V\beta$, $V = |\mathfrak{V}|$, $\beta =$ Anstellwinkel):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{\varrho \pi l}{4}\Bigg[l\frac{d(V\beta)}{d\tau} + 4V^2\beta - G_1 V^2\gamma + G_2 l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} + G_3 l V\omega_1 - G_4 l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} \\
&\qquad - G_5 l V\omega_2 - \frac{2}{\pi} V \int_{s_0}^{s} \frac{u(a)\,d a}{\sqrt{(s-a)^2 + l(s-a)}}\Bigg] \\
\mathfrak{M} &= \frac{\varrho \pi l^2}{4}\left[\frac{l}{4}\cdot\frac{d(V\beta)}{d\tau} - G_6 V^2\gamma + G_7 l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} - \frac{l}{4} V\omega_1 - G_8 l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} - G_9 l V \omega_2\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . (63).}$$

$\mathfrak{M}$ ist hier auf P_v bezogen; Abb. 5.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_R &= \frac{\varrho \pi l}{4}\Bigg[G_{10} l \frac{d(V\beta)}{d\tau} + G_{11} V^2\beta - G_{12} V^2\gamma + G_{13} l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} \\
&\qquad - G_{14} l V\omega_1 - G_{15} l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} - G_{16} l V\omega_2 - \frac{G_{11}}{2\pi} V \int_{s_0}^{s} \frac{u(a)\,d a}{\sqrt{(s-a)^2 + l(s-a)}}\Bigg] \\
\mathfrak{M}_R &= \frac{\varrho \pi l^2}{4}\Bigg[G_4 l \frac{d(V\beta)}{d\tau} + G_{17} V^2\beta - G_{18} V^2\gamma + G_{19} l^2 \frac{d\omega_1}{d\tau} - G_{20} l V\omega_1 \\
&\qquad - G_{21} l^2 \frac{d\omega_2}{d\tau} - G_{22} l V\omega_2 - \frac{G_{17}}{2\pi} V \int_{s_0}^{s} \frac{u(a)\,d a}{\sqrt{(s-a)^2 + l(s-a)}}\Bigg]
\end{aligned}\right\} \quad \text{(64).}$$

$\mathfrak{M}_R$ ist auf O bezogen.

Die Stärke $u(a)$ der sich ablösenden Wirbel ist durch (62) bestimmt:

$$V_y^* = -V\beta + \frac{g_0}{4} V\gamma - \frac{g_1 l}{4}\omega_1 + \frac{g_2 l}{4}\omega_2 = -\frac{1}{\pi l}\int_{s_0}^{s} \sqrt{1 + \frac{l}{s-a}}\, u(a)\, d a \quad \text{. . . (65).}$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_R$ sind reine Auftriebskräfte.

Die Beiwerte G_1 bis G_{22} sind Funktionen von $\mu\pi$ und daher nach (5) auch Funktionen von λ. Zur Abkürzung setzen wir $\mu\pi = \eta$. Wir haben dann

$$\lambda = \frac{1-\cos\eta}{2};$$

$$G_1 = \frac{4}{\pi}[\eta + \sin\eta]; \qquad G_2 = \frac{\cos\eta}{2}; \qquad G_3 = 2\cos\eta - 1;$$

$$G_4 = \frac{1}{2\pi}\left[\sin\eta - \eta\cos\eta - \frac{\sin^3\eta}{3}\right]; \qquad G_5 = \frac{2}{\pi}[\eta + \sin\eta][1-\cos\eta];$$

$$G_6 = \frac{1}{\pi}\sin\eta\,[1+\cos\eta]; \qquad G_7 = \frac{4\cos\eta - 1}{32};$$

$$G_8 = \frac{1}{32\pi}\left[4(\sin\eta - \eta\cos\eta) + \eta - \sin\eta\cos\eta - \frac{2}{3}\sin^3\eta\,(2+\cos\eta)\right];$$

$$G_9 = \frac{1}{2\pi}\left[\eta - \sin\eta\cos\eta + \frac{2}{3}\sin^3\eta\right]; \qquad G_{10} = \frac{1}{\pi}[\eta - \sin\eta\cos\eta]; \qquad G_{11} = \frac{4}{\pi}[\eta - \sin\eta];$$

$$G_{12} = \frac{4}{\pi^2}\eta^2; \qquad G_{13} = \frac{1}{2\pi}\left[-\sin\eta + \eta\cos\eta + \frac{2}{3}\sin^3\eta\right]; \qquad G_{14} = \frac{1}{\pi}[\eta + \sin\eta\cos\eta - 2\eta\cos\eta];$$

$$G_{15} = \frac{1}{2\pi^2}[\eta - \sin\eta\cos\eta][\sin\eta - \eta\cos\eta]; \qquad G_{16} = \frac{2}{\pi^2}\eta\,[\eta + \sin\eta][1-\cos\eta];$$

$$G_{17} = \frac{1}{\pi}[2(\sin\eta - \eta\cos\eta) - \eta + \sin\eta\cos\eta];$$

$$G_{18} = \frac{1}{\pi^2}[(2\eta + \sin\eta)(\sin\eta - \eta\cos\eta) - \eta(\eta - \sin\eta\cos\eta)];$$

$$G_{19} = \frac{1}{32\pi}[(1+8\cos^2\eta)(\sin\eta\cos\eta - \eta) + 6\sin^3\eta\cos\eta];$$

$$G_{20} = \frac{1}{\pi}\left[\cos\eta\,(\eta\cos\eta - \sin\eta) + \frac{\sin^3\eta}{3}\right];$$

$$G_{21} = \frac{1}{32\pi^2}[\eta^2(1+8\cos^2\eta) - 5\sin^4\eta + 4\eta\sin^3\eta\cos\eta + 9\sin^2\eta - 18\eta\sin\eta\cos\eta];$$

$$G_{22} = \frac{1}{2\pi^2}[\sin\eta - \eta\cos\eta][2(\sin\eta - \eta\cos\eta) + \eta - \sin\eta\cos\eta].$$

Wir bringen ferner die Beiwerte g_0 bis g_{20}, die im Verlaufe der Untersuchung vorgekommen sind, mit dem Hinweis auf die Gleichungen, in denen sie zuerst auftreten:

$$g_0 = G_1; \qquad g_1 = G_3; \qquad g_2 = G_5 - G_{10} \quad \ldots\ldots \quad \text{siehe (24a)};$$

$$\left.\begin{aligned} &g_3 = G_{10}; \quad g_4 = G_2; \quad g_5 = G_{13}; \quad g_6 = \frac{1+8\cos^2\eta}{32}; \quad g_7 = G_4; \\ &g_8 = \frac{1}{32\pi}[-\eta(1+8\cos^2\eta) + 9\sin\eta\cos\eta - 2\sin^3\eta\cos\eta] \end{aligned}\right\} \text{siehe (32)};$$

$$g_9 = \frac{4}{\pi}\eta; \qquad g_{10} = G_{11} \quad \ldots\ldots \quad \text{siehe (53)};$$

$$g_{11} = \frac{2}{\pi}[\sin\eta - \eta\cos\eta]; \qquad g_{12} = G_{17} \quad \ldots\ldots \quad \text{siehe (58a)};$$

$$\left.\begin{aligned} &g_{13} = \frac{1}{\pi^2}[\eta^2 + \sin^2\eta - 2\eta\sin\eta\cos\eta]; \qquad g_{14} = \frac{4}{\pi}\sin\eta; \\ &g_{15} = \frac{4}{\pi^2}\eta\sin\eta; \qquad g_{16} = G_{15}; \qquad g_{17} = \frac{1}{\pi}\sin\eta\cos\eta; \\ &g_{18} = G_{19}; \qquad g_{19} = \frac{1}{\pi^2}[\sin^2\eta - \eta\sin\eta\cos\eta]; \qquad g_{20} = G_{21} \end{aligned}\right\} \ldots \text{siehe (59)}$$

Die Beiwerte sind für den Bereich $0 \leq \mu \leq 1$ bestimmt, d. h. nach (5) für den Bereich $0 \leq \lambda \leq 1$. Die Vorzeichen der G und g sind so gewählt, daß für kleine $\mu\pi = \eta$ $G > 0$ bzw. $g > 0$ gilt. Der Verlauf der Beiwerte G ist abhängig von $\eta = \mu\pi$ (und abhängig von λ) in den Abb. 6 bis 9 für das praktisch interessierende Intervall $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{2}$ (d. h. $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1/2$) dar-

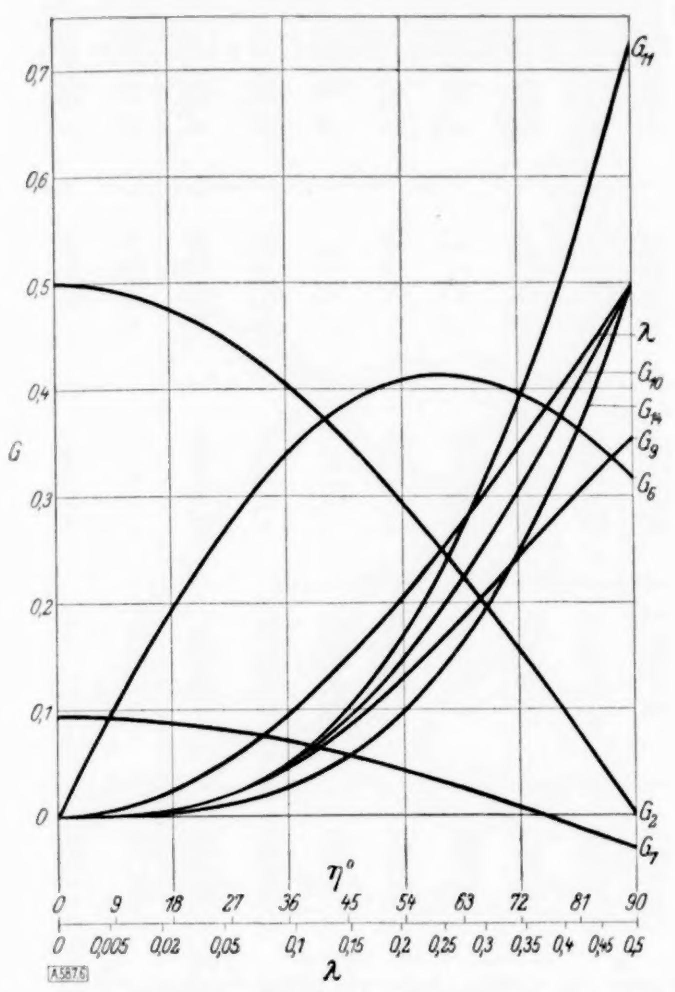


Abb. 6. Das Tiefenverhältnis λ abhängig von η. Die Beiwerte G_2, G_6, G_7, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{14} abhängig von η bzw. λ.

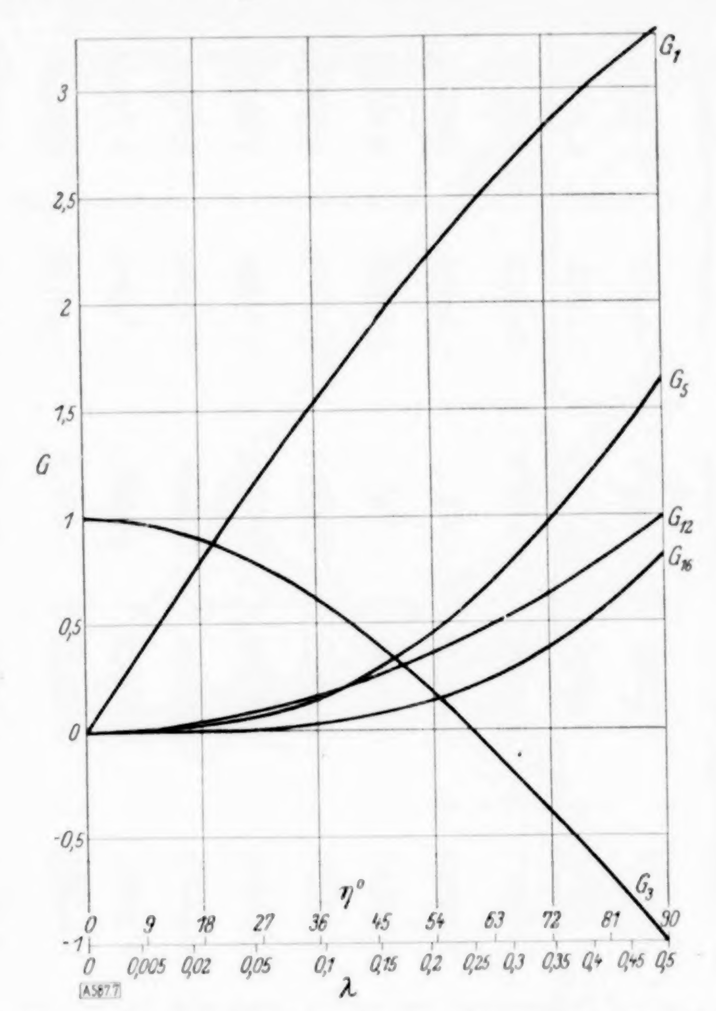


Abb. 7. Die Beiwerte G_1, G_3, G_5, G_{12}, G_{16} abhängig von η bzw. λ.

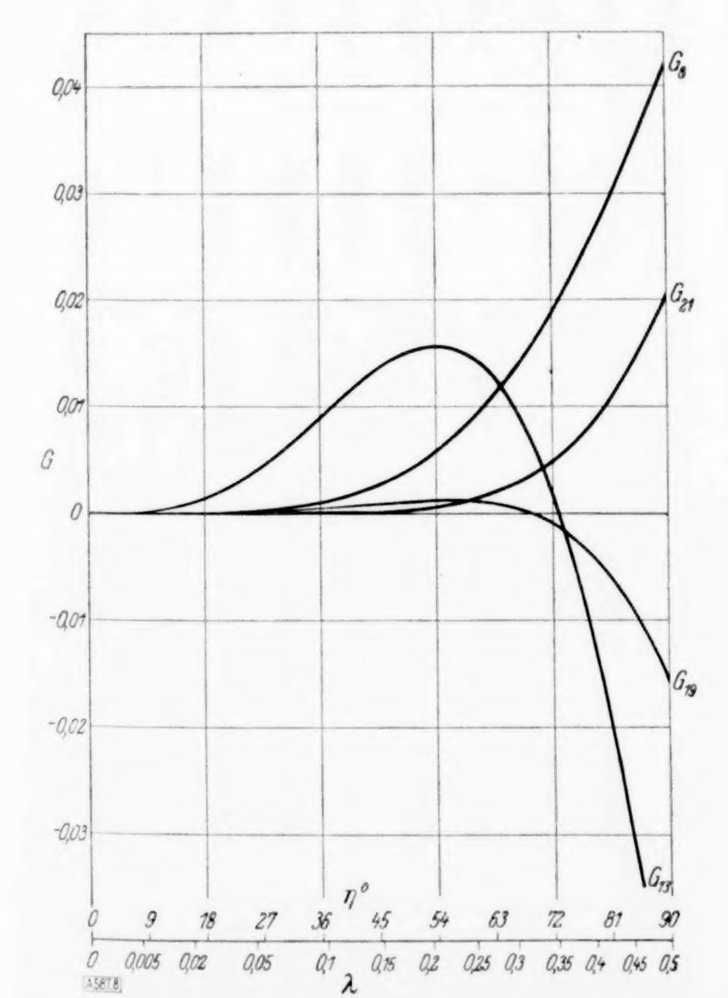


Abb. 8. Die Beiwerte G_8, G_{13}, G_{19}, G_{21} abhängig von η bzw. λ.

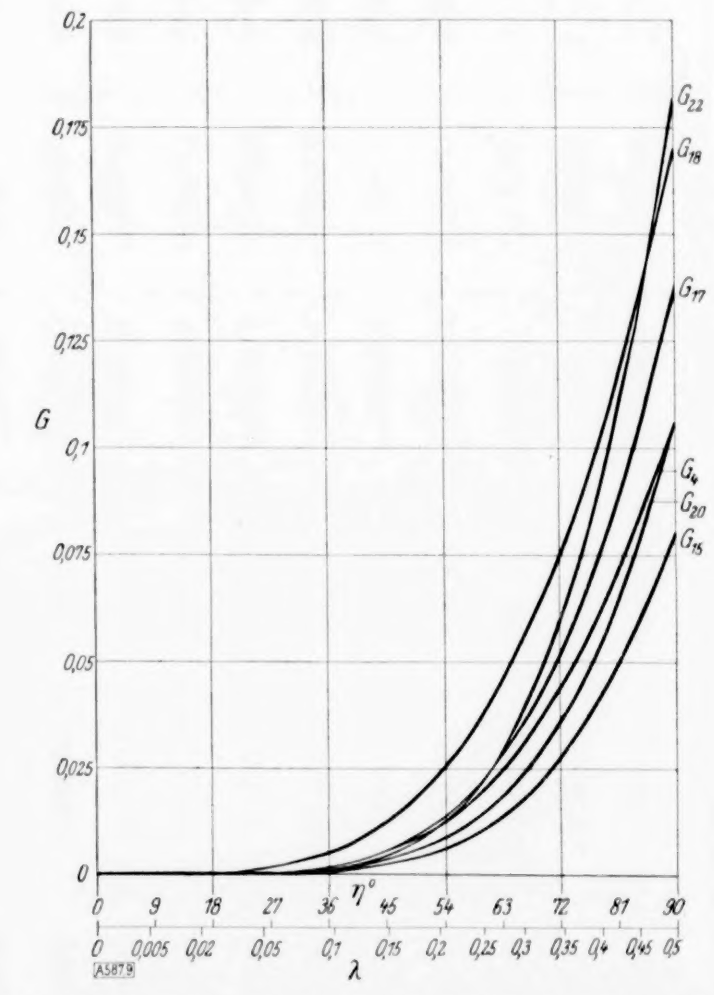


Abb. 9. Die Beiwerte G_4, G_{15}, G_{17}, G_{18}, G_{20}, G_{22} abhängig von η bzw. λ.

gestellt. Außerdem sind die Zahlenwerte für G_1 bis G_{22} in einer Tabelle I angegeben, wobei das Intervall $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{2}$ in 20 gleiche Teile geteilt ist.

Tabelle I

η^0	λ	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}
0	0	0	0,5	1	0	0	0	0,09375	0	0	0	0
4,5	0,00154	0,19990	0,49846	0,99384	0	0,00031	0,04987	0,09337	0	0,00010	0,00010	0,00010
9	0,00616	0,39917	0,49385	0,97538	0	0,00246	0,09897	0,09221	0	0,00082	0,00082	0,00083
13,5	0,01382	0,59724	0,48619	0,94474	0,00002	0,00825	0,14656	0,09030	0,00001	0,00272	0,00274	0,00276
18	0,02447	0,79346	0,47553	0,90212	0,00006	0,01942	0,19191	0,08763	0,00003	0,00636	0,00645	0,00654
22,5	0,03806	0,98724	0,46194	0,84776	0,00019	0,03757	0,23435	0,08424	0,00009	0,01218	0,01246	0,01276
27	0,05450	1,17804	0,44551	0,78202	0,00046	0,06420	0,27327	0,08013	0,00023	0,02055	0,02124	0,02196
31,5	0,07368	1,36527	0,42632	0,70528	0,00099	0,10059	0,30813	0,07533	0,00048	0,03173	0,03319	0,03473
36	0,09549	1,54840	0,40451	0,61804	0,00187	0,14785	0,33847	0,06988	0,00090	0,04587	0,04863	0,05160
40,5	0,11980	1,72691	0,38021	0,52082	0,00328	0,20688	0,36392	0,06380	0,00156	0,06297	0,06780	0,07310
45	0,14645	1,90032	0,35356	0,41422	0,00539	0,27829	0,38424	0,05714	0,00252	0,08294	0,09085	0,09968
49,5	0,17528	2,06819	0,32473	0,29890	0,00840	0,36250	0,39924	0,04993	0,00389	0,10555	0,11780	0,13182
54	0,20611	2,23008	0,29390	0,17558	0,01250	0,45963	0,40889	0,04222	0,00571	0,13050	0,14863	0,16993
58,5	0,23875	2,38562	0,26125	+ 0,04500	0,01791	0,56956	0,41321	0,03406	0,00805	0,15737	0,18319	0,21439
63	0,27301	2,53447	0,22700	— 0,09202	0,02483	0,69192	0,41238	0,02550	0,01099	0,18567	0,22124	0,26553
67,5	0,30866	2,67632	0,19134	— 0,23464	0,03345	0,82607	0,40661	0,01659	0,01456	0,21490	0,26246	0,32368
72	0,34549	2,81093	0,15451	— 0,38196	0,04392	0,97115	0,39628	+ 0,00738	0,01879	0,24450	0,30645	0,38908
76,5	0,38328	2,93806	0,11673	— 0,53310	0,05637	1,12609	0,38177	— 0,00207	0,02369	0,27392	0,35274	0,46194
81	0,42179	3,05757	0,07822	— 0,68714	0,07088	1,28964	0,36357	— 0,01170	0,02925	0,30264	0,40082	0,54244
85,5	0,46077	3,16932	0,03923	— 0,84308	0,08747	1,46033	0,34223	— 0,02144	0,03542	0,33018	0,45010	0,63069
90	0,5	3,27324	0	— 1	0,10610	1,63662	0,31831	— 0,03125	0,04215	0,35610	0,5	0,72677

Tabelle I (Fortsetzung).

η^0	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{15}	G_{16}	G_{17}	G_{18}	G_{19}	G_{20}	G_{21}	G_{22}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4,5	0,00250	0,00003	0,00005	0	0,00010	0	0	0	0	0	0
9	0,01000	0,00020	0,00041	0	0,00012	0	0,00002	0	0	0	0
13,5	0,02250	0,00066	0,00140	0	0,00062	0,00002	0,00010	0	0,00001	0	0
18	0,04000	0,00150	0,00334	0,00001	0,00194	0,00006	0,00033	0,00002	0,00004	0	0,00002
22,5	0,06250	0,00278	0,00657	0,00004	0,00470	0,00019	0,00079	0,00004	0,00010	0	0,00008
27	0,09000	0,00450	0,01145	0,00012	0,00963	0,00047	0,00164	0,00010	0,00025	0	0,00023
31,5	0,12250	0,00658	0,01839	0,00028	0,01760	0,00102	0,00302	0,00019	0,00055	0,00001	0,00058
36	0,16000	0,00890	0,02776	0,00062	0,02957	0,00196	0,00512	0,00033	0,00108	0,00003	0,00126
40,5	0,20250	0,01125	0,04002	0,00120	0,04655	0,00347	0,00815	0,00051	0,00197	0,00007	0,00248
45	0,25000	0,01336	0,05559	0,00219	0,06957	0,00576	0,01231	0,00073	0,00336	0,00016	0,00453
49,5	0,30250	0,01493	0,07500	0,00374	0,09969	0,00909	0,01786	0,00094	0,00545	0,00033	0,00776
54	0,36000	0,01559	0,09870	0,00603	0,13789	0,01373	0,02502	0,00109	0,00847	0,00063	0,01262
58,5	0,42250	0,01497	0,12718	0,00931	0,18511	0,01999	0,03407	0,00110	0,01269	0,00112	0,01962
63	0,49000	0,01269	0,16097	0,01402	0,24217	0,02820	0,04524	0,00085	0,01843	0,00191	0,02935
67,5	0,56250	0,00838	0,20053	0,01976	0,30978	0,03868	0,05879	+ 0,00020	0,02605	0,00310	0,04243
72	0,64000	+ 0,00171	0,24633	0,02745	0,38846	0,05180	0,07494	— 0,00103	0,03592	0,00483	0,05953
76,5	0,72250	— 0,00760	0,29883	0,03709	0,47859	0,06785	0,09393	— 0,00302	0,04846	0,00725	0,08132
81	0,81000	— 0,01977	0,35839	0,04890	0,58034	0,08717	0,11594	— 0,00598	0,06407	0,01055	0,10844
85,5	0,90250	— 0,03490	0,42536	0,06303	0,69366	0,11002	0,14113	— 0,01012	0,08315	0,01490	0,14146
90	1	— 0,05305	0,5	0,07958	0,81831	0,13662	0,16963	— 0,01563	0,10610	0,02048	0,18090

Wir stellen die Voraussetzungen, unter denen die gefundenen Formeln für die Kräfte und Momente gelten, noch einmal zusammen: Gegeben ist (Abb. 1) der Flügel mit der Gesamttiefe l, mit der Querrudertiefe $l_2 \left(\frac{l_2}{l} = \lambda = \frac{1 - \cos\eta}{2}\right)$ und mit dem Querruderausschlag $\gamma \left(\left|\frac{\gamma}{\pi}\right| \ll 1\right)$. Der Bewegungszustand des Flügels ist bestimmt durch die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Hauptflügels (l_1) um O und die Komponenten $V_x = -V$, $V_y = -V \sin\beta$, $\omega_2 = \frac{d\gamma}{d\tau}$, die auf das mit dem Hauptflügel (l_1) festverbundene x, y-System bezogen sind. Der Anstellwinkel β ist klein vorausgesetzt, d. h. V_y ist klein gegenüber V (β ist der Winkel zwischen dem Hauptflügel (l_1) und der Richtung von $\mathfrak{V}$; β wird vom Hauptflügel aus gemessen, und zwar positiv entgegen dem Uhrzeigersinn); ferner sind klein vorausgesetzt $\frac{dV_x}{d\tau}$, $\frac{dV_y}{d\tau}$, ω_1, $\frac{d\omega_1}{d\tau}$, ω_2, $\frac{d\omega_2}{d\tau}$; auf Grund der Integralgleichung (64) ist dann auch $u(a)$ klein. Produkte der Größen, die wir klein angenommen haben $\left(\text{mit Einschluß von } \frac{\gamma}{\pi}!\right)$, sind vernachlässigt. $\mathfrak{M}$ ist auf P_v, $\mathfrak{M}_R$ ist auf O bezogen (entgegen dem Uhrzeigersinn positiv); die Kräfte sind nach oben positiv gerechnet.

Eine zusätzliche (schwache) Krümmung des Profils gibt Zusatzkräfte, die nach Lage und Größe konstant sind, da sie nur von der (zeitlich) konstanten Krümmung abhängen. Für den Fall, daß das Profilskelett ein Kreisbogen oder eine Kurve dritter Ordnung ist, erhält man die Zusatzkräfte durch Kombination der Formeln (63) und (64) mit den Ergebnissen für gekrümmte Profile in stationärer Strömung, wie sie z. B. in Hütte I, 1931, S. 401, angegeben sind. Die von der Krümmung herrührenden konstanten Zusatzkräfte spielen bei Flügelschwingungen und im allgemeinen auch bei Stabilitätsbetrachtungen keine Rolle.

Anwendungen.

1. Luftkräfte auf den Flügel ohne Querruder. Die Luftkräfte auf den Flügel ohne Querruder erhält man aus (63), wenn man $\gamma = 0$ $\left(\text{und } \omega_2 = 0;\ \frac{d\omega_2}{d\tau} = 0\right)$ setzt. Den Drehpunkt O können wir noch beliebig wählen, z. B. so, daß die Ausbildung der Unstetigkeit hinter dem Flügel nur von V_y abhängt. Nach (65) ist dieses der Fall, wenn $g_1 = 0$ ist; das ergibt $\mu = {}^1/_2$. Es ist dann $\lambda = {}^1/_4$, d. h. der Drehpunkt O fällt nach dem Punkt P_h, der in ein Viertel der Flügeltiefe vor der Hinterkante liegt (Abb. 5). Wir erhalten so in Übereinstimmung mit H. Wagner (vgl. dort S. 35, siehe Anm. 2)

$$\mathfrak{P} = \frac{\varrho\pi l}{4}\left[l\,\frac{d(V\beta)}{d\tau} + 4V^2\beta + \frac{l^2}{4}\cdot\frac{d\omega_1}{d\tau} - \frac{2}{\pi}V\int_{s_0}^{s}\frac{u(a)\,da}{\sqrt{(s-a)^2 + l\cdot(s-a)}}\right],$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\varrho\pi l^2}{4}\left[\frac{l}{4}\cdot\frac{d(V\beta)}{d\tau} + \frac{l^2}{32}\cdot\frac{d\omega_1}{d\tau} - \frac{l}{4}V\omega_1\right].$$

Für die Ausbildung der Unstetigkeit $u(a)$ ergibt sich die Integralgleichung

$$V\beta = \frac{1}{\pi l}\int_{s_0}^{s}\sqrt{1 + \frac{l}{s-a}}\,u(a)\,da.$$

2. Luftkräfte bei stationärer Bewegung des Flügels. Der Sonderfall der stationären Bewegung ergibt sich, wenn wir setzen $\omega_1 = \omega_2 = \frac{d(V\beta)}{d\tau} = 0$; ferner müssen die Wirbel sehr weit entfernt vom Flügel angenommen werden, d. h. $x = \infty$ (siehe Abb. 3). Wir erhalten so aus (63) und (64), bzw. aus (38), (39), (60) und (61)

$$\mathfrak{P} = \frac{\varrho\pi l}{4}V^2[4\beta - G_1\gamma]; \qquad \mathfrak{M} = \frac{\varrho\pi l^2}{4}V^2[-G_6\gamma];$$

$$\mathfrak{P}_R = \frac{\varrho\pi l}{4}V^2[G_{11}\beta - G_{12}\gamma]; \qquad \mathfrak{M}_R = \frac{\varrho\pi l^2}{4}V^2[G_{17}\beta - G_{18}\gamma].$$

Die Zirkulation Γ um den Flügel ist dabei

$$\Gamma = \pi l V\left[-\beta + \frac{G_1}{4}\gamma\right].$$

3. Luftkräfte bei harmonischen Schwingungen des Flügels. Die gefundenen Formeln (63) und (64) für die Luftkräfte wollen wir jetzt noch auf den Fall anwenden, daß der Flügel bei konstanter Vorwärtsgeschwindigkeit harmonische Schwingungen ausführt, d. h. daß die Bewegungskomponenten V_y, ω_1, ω_2 periodische Funktionen der Zeit sind. Für konstante Vorwärtsgeschwindigkeit heißt das aber, daß V_y, ω_1, ω_2 auch periodische Funktionen des zurückgelegten Weges s sind. Unsere Aufgabe besteht jetzt darin, $u(a)$ auf Grund der Integralgleichung (65) zu bestimmen und daraus das in den Formeln (65) und (66) auftretende Integral J zu berechnen:

$$J = \int_{s_0}^{s} \frac{u(a)\,d\,a}{\sqrt{(s-a)^2 + l\,(s-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66).$$

Die übrigen Ausdrücke in den zuletzt genannten Formeln sind bei gegebenen V_y, γ, ω_1, ω_2 direkt gegeben. Entsprechend der Annahme harmonischer Schwingungen machen wir folgenden Ansatz für die Bewegung des Flügels (Abb. 10):

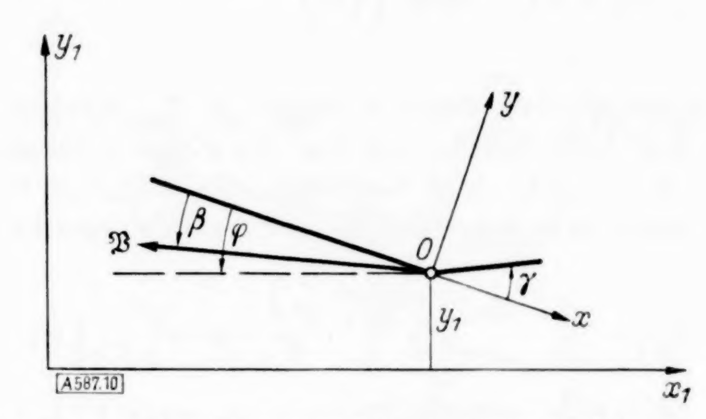


Abb. 10. Festlegung der Schwingung des Flügels durch die Komponenten y_1, φ und γ.

Es sei

$y_1 = l\,A\,e^{i\nu\tau}$ Ausschlag y_1 des Punktes O gegenüber einem raumfesten Koordinatensystem (x_1, y_1),

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $\varphi_1 = B\,e^{i\nu\tau}$ Drehwinkel φ des Hauptflügels (l_1) bezogen auf das raumfeste Koordinatensystem (x_1, y_1), wobei φ_0 zeitlich konstant und $\dfrac{d\varphi}{d\tau} = -\omega_1$ ist,

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, $\gamma_1 = C\,e^{i\nu\tau}$ Drehwinkel γ des Querruders bezogen auf den Flügel (x, y-Koordinatensystem), wobei γ_0 zeitlich konstant und $\dfrac{d\gamma}{d\tau} = \omega_2$ ist.

Die dimensionslosen, im allgemeinen komplexen, Konstanten A, B, C geben Amplitude und Phase, wobei diese Konstanten hier noch unbestimmt bleiben. ν ist die Kreisfrequenz der Schwingung, τ die Zeit. Die physikalische Lösung sei gegeben durch den reellen Teil von y_1, φ und γ. Unser Ansatz ergibt für y_1 eine rein harmonische Schwingung (ein zeitlich konstanter Ausschlag y_0 hat für das Folgende keine Bedeutung, da nur $\dfrac{d\,y_1}{d\,\tau}$ maßgebend wird), für φ bzw. γ eine Schwingung um den zeitlich konstanten Winkel φ_0 bzw. γ_0. Zu unseren früheren Voraussetzungen machen wir noch die Annahme, daß φ klein ist. Es ist dann (siehe Abb. 10; φ und β sind vom Flügel aus gezählt, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gerechnet):

$$\left.\begin{aligned} V_{x_1} &= -V\cos(\varphi-\beta) = -V & \qquad V_x &= -V\cos\beta = -V \\ V_{y_1} &= \frac{d\,y_1}{d\,\tau} = V(\varphi-\beta) & \qquad V_y &= -V\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (67).$$

Wir erhalten somit aus (67) für den Anstellwinkel β

$$\beta = \varphi - \frac{1}{V}\cdot\frac{d\,y_1}{d\,\tau} = \varphi_0 + \varphi_1 - \frac{1}{V}\cdot\frac{d\,y_1}{d\,\tau}.$$

Der Anstellwinkel setzt sich also zusammen aus einem zeitlich konstanten Anteil (φ_0) und einem rein harmonischen Anteil $\left(\varphi_1 - \frac{1}{V} \cdot \frac{d y_1}{d \tau}\right)$. Der Zerlegung von β entspricht nach (67) eine Zerlegung für V_y

$$V_y = -V \varphi_0 - V \varphi_1 + \frac{d y_1}{d \tau}.$$

Für die Untersuchung der Schwingungen können wir von dem zeitlich konstanten Anteil $-V \varphi_0$ und ebenso von der Wirkung des zeitlich konstanten Ruderausschlages γ_0 absehen, denn diese ergeben nach (63) (und (64)) nur einen zeitlich konstanten Auftrieb $\mathfrak{P}_0$, hervorgerufen durch eine zeitlich konstante Zirkulation Γ_0 um den Flügel, die unabhängig von der Ausbildung der Wirbelschicht $u(a)$ ist. Es gilt für diesen Auftrieb

$$\mathfrak{P}_0 = -\varrho V \Gamma_0$$

mit

$$\Gamma_0 = \pi l V\left(-\varphi_0 + \frac{G_1}{4} \gamma_0\right).$$

(Wenn das Flügelprofil gekrümmt ist, dann kommt zu $\mathfrak{P}_0$ infolge der Krümmung noch ein weiterer zeitlich konstanter Auftrieb hinzu, der für die Schwingungen auch unwesentlich ist.) Bei horizontalem Fluge ist $\mathfrak{P}_0$ gleich dem Gewicht des Flügels (bzw. Flugzeuges). Unsere Integralgleichung (65) wird jetzt mit den rein harmonischen Anteilen von y_1, φ und γ

$$-V \varphi_1 + \frac{d y_1}{d \tau} + \frac{g_0}{4} V \gamma_1 + \frac{g_1 l}{4} \cdot \frac{d \varphi_1}{d \tau} + \frac{g_2 l}{4} \cdot \frac{d \gamma_1}{d \tau} = -\frac{1}{\pi l} \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 + \frac{l}{s-a}}\, u(a)\, d a \quad . \; . \quad (68).$$

Infolge der rein harmonischen Schwingungen des Flügels wird sich hinter demselben eine (im Raum ruhende) zeitlich unveränderliche Unstetigkeitsfläche ergeben, die periodisch von dem zurückgelegten Weg s abhängt (Abb. 11). Eine rein periodische Abhängigkeit der Unstetigkeit mit konstanter Amplitude längs s können wir nur erwarten, wenn wir von dem Anfahrvorgang (für $s = s_0$ sei der Flügel in Ruhe) absehen.

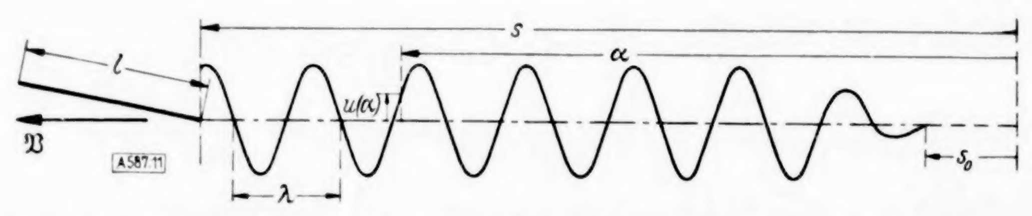


Abb. 11. Die Ausbildung der Unstetigkeit $u(a)$ hinter dem Flügel bei harmonischen Schwingungen des Flügels.

Wir machen deshalb für $u(a)$ den Ansatz

$$u(a) = U \cdot e^{i 2 \omega \frac{a}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69),$$

wobei

$$2 \omega = \frac{\nu l}{V} = \frac{2 \pi l}{\lambda} \qquad 2 \omega s = \nu \tau l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70).$$

Als physikalische Lösung wählen wir $\Re\{u(a)\}$, entsprechend dem reellen Teil unseres Ansatzes für y_1, φ_1 und γ_1. U ist so zu bestimmen, daß die Integralgleichung (68) erfüllt ist. Diese ergibt jetzt mit unseren Ansätzen für $y_1, \varphi_1, \gamma_1, u(a)$:

$$\left.\begin{aligned} V\left[A \cdot 2 \omega i - B \cdot \left(1 - 2 \omega i \frac{g_1}{4}\right) + C \cdot \left(\frac{g_0}{4} + 2 \omega i \frac{g_2}{4}\right)\right] e^{i 2 \omega \frac{s}{l}} \\ = -\frac{U}{\pi l} \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 + \frac{l}{s-a}}\, e^{i 2 \omega \frac{a}{l}}\, d a \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (68\,a).$$

Wir führen die dimensionslose Veränderliche ξ ein durch die Substitution

$$\xi l = s - a$$

und erhalten dann für (68a)

$$V D e^{i 2\omega \frac{s}{l}} = -\frac{U}{\pi} e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \int_0^{\frac{s-s_0}{l}} \left[\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}-1\right] e^{-i 2\omega \xi}\, d\xi - \frac{U}{\pi} e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \int_0^{\frac{s-s_0}{l}} e^{-i 2\omega \xi}\, d\xi \quad . \quad . \quad (68\,\mathrm{b}),$$

wobei zur Abkürzung

$$D = A \cdot 2\omega i - B \cdot \left(1 - 2\omega i \frac{g_1}{4}\right) + C \cdot \left(\frac{g_0}{4} + 2\omega i \frac{g_2}{4}\right)$$

gesetzt ist. Wir betrachten „stationären Schwingungszustand", d. h. der Flügel ist sehr weit entfernt von der Anfahrstelle $s = s_0$ zu denken. Es ist also $\frac{s-s_0}{l}$ sehr groß, und Gl. (68b) ergibt

$$V D e^{i 2\omega \frac{s}{l}} = -\frac{U}{\pi} e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \left[f_c(\omega) - i\left(f_s(\omega) + \frac{1}{2\omega}\right)\right] - \frac{U i}{2\pi\omega} e^{i 2\omega \frac{s_0}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

mit

$$f_c(\omega) = \int_0^\infty \left[\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}-1\right] \cos 2\omega\xi\, d\xi \qquad f_s(\omega) = \int_0^\infty \left[\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}-1\right] \sin 2\omega\xi\, d\xi \quad . \quad (72).$$

Gl. (71) muß zumindest für den reellen Teil für alle s erfüllt sein, d. h. es muß gelten:

$$\Re\left\{\frac{U i}{2\pi\omega} e^{i 2\omega \frac{s_0}{l}}\right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Gehen wir jetzt wieder zur komplexen Schreibweise über, so können wir den zweiten Summanden der rechten Seite von (71) weglassen und erhalten für U

$$U = -\frac{\pi D V}{f_c - i\left(f_s + \frac{1}{2\omega}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74).$$

Damit ist U der Größe und Phase nach bekannt. $\Re\{u(\alpha)\}$ (69) befriedigt die Integralgleichung (68), wenn U durch (74) gegeben ist. s_0 muß dabei so gewählt werden, daß die Bedingung (73) erfüllt ist; dieses ist immer möglich.

Wir sind jetzt in der Lage, das in (63) und (64) auftretende Integral J (66) zu berechnen. Mit der dimensionslosen Veränderlichen ξ ergibt sich unter Benutzung von (69)

$$J = U e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \int_0^\infty \frac{e^{-i 2\omega \xi}\, d\xi}{\sqrt{\xi^2+\xi}} = U e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \left[\varphi_c - i\varphi_s\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

mit

$$\varphi_c = \int_0^\infty \frac{\cos 2\omega\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2+\xi}} \qquad \varphi_s = \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2+\xi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Schließlich ergibt sich aus (74) und (75)

$$J = -\pi D V \frac{\varphi_c - i\varphi_s}{f_c - i\left(f_s + \frac{1}{2\omega}\right)} e^{i 2\omega \frac{s}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77).$$

Der gefundene Wert von J ist in die Formeln (63) und (64) einzuführen, womit die Berechnung der Kräfte auf einen harmonisch schwingenden Flügel grundsätzlich erledigt ist. Die Luftkräfte sind rein harmonische Funktionen der Zeit bzw. des zurückgelegten Weges s.

Bei gegebenen A, B, C ist Phase und Größe von J nach (77) bestimmt durch den Faktor

$$-\pi D V \frac{\varphi_c - i\varphi_s}{f_c - i\left(f_s + \frac{1}{2\omega}\right)}$$

mit

$$D = A \cdot 2\omega i - B \cdot \left(1 - 2\omega i \frac{g_1}{4}\right) + C \cdot \left(\frac{g_0}{4} + 2\omega i \frac{g_2}{4}\right).$$

A, B und C ergeben sich aus der Lösung der linearen Differentialgleichungen, welche die Schwingungen des mit Masse belegten Flügelprofils unter der Einwirkung von elastischen Kräften und der Luftkräfte beschreiben. Die Untersuchung dieser Flügelschwingungen wird hier nicht gebracht, da sie über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde.

Die Integrale (72) und (76) lassen sich in geschlossener Form durch Besselsche Funktionen ausdrücken. Es ergibt sich für sie nach von Borbely[18]) mit den Bezeichnungen im Jahnke-Emde[19])

$$\varphi_c(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\sin\omega\cdot J_0(\omega) - \cos\omega\cdot N_0(\omega)\right], \qquad \varphi_s(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\sin\omega\cdot N_0(\omega) + \cos\omega\cdot J_0(\omega)\right] \quad (76\text{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} f_c(\omega) &= \frac{\pi}{4}\left[\sin\omega\,(J_0(\omega) - N_1(\omega)) - \cos\omega\,(J_1(\omega) + N_0(\omega))\right], \\ f_s(\omega) + \frac{1}{2\omega} &= \frac{\pi}{4}\left[\sin\omega\,(J_1(\omega) + N_0(\omega)) + \cos\omega\,(J_0(\omega) - N_1(\omega))\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (72\text{a})$$

mit

$$N_0(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[Y_0(\omega) - J_0(\omega)\ln\frac{2}{\gamma}\right], \qquad N_1(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[Y_1(\omega) - J_1(\omega)\ln\frac{2}{\gamma}\right]^{19)}$$

J_0 und Y_0 sind die Besselschen Funktionen nullter Ordnung erster bzw. zweiter Art. Entsprechend sind J_1 und Y_1 die Besselschen Funktionen erster Ordnung erster bzw. zweiter Art. Der Kurvenverlauf von (72a) und (76a) ist in Abb. 12 aufgezeichnet. Die Zahlenwerte sind in einer Tabelle II zusammengestellt.

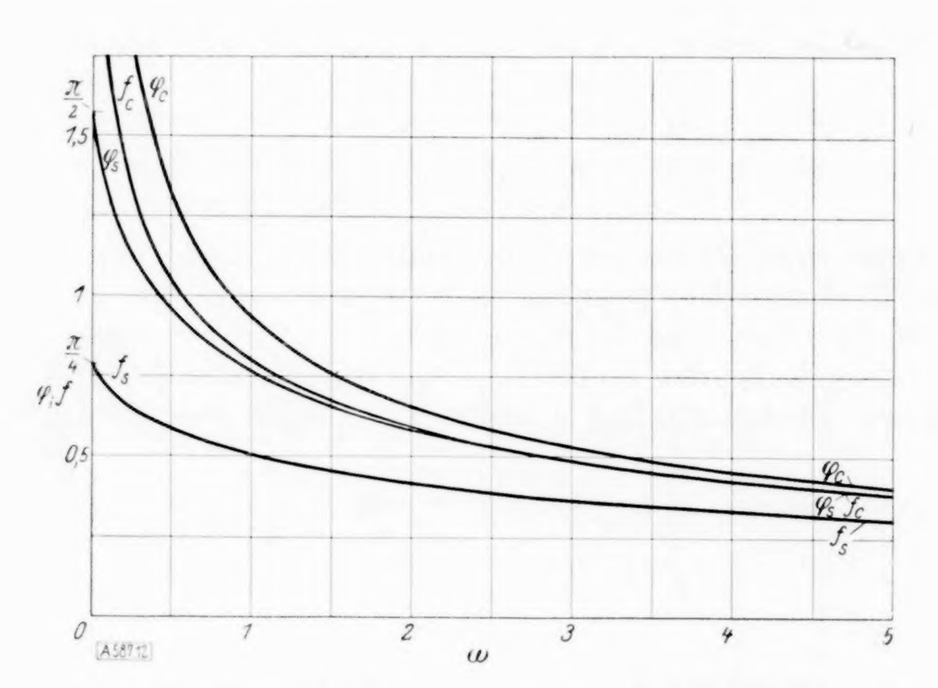


Abb. 12. Die Funktionen f_c, f_s, φ_c und φ_s in Abhängigkeit von ω.

Tabelle II.

ω	0,10	0,20	0,35	0,50	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
f_c	1,7895	1,4288	1,1935	1,0467	0,7979	0,6718	0,5917	0,5348	0,4918	0,4299	0,3869
f_s	0,7106	0,6672	0,6187	0,5850	0,5054	0,4547	0,4181	0,3901	0,3674	0,3324	0,3065
φ_c	2,5543	1,9732	1,5556	1,3194	0,9366	0,7594	0,6535	0,5813	0,5283	0,4546	0,4050
φ_s	1,3184	1,1867	1,0535	0,9591	0,7660	0,6562	0,5826	0,5292	0,4880	0,4279	0,3858

587

[18]) von Borbely: Mathematischer Beitrag zur Theorie der Flügelschwingungen, ZAMM 1936, S. 1.

[19]) Jahnke-Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 1928.

Zum Problem der Anlaufströmung einer Flüssigkeit im geraden Rohr mit Kreisring- und Kreisquerschnitt.

Von *Wilhelm Müller* in Aachen.

1. Einleitung. Wenn eine reibende Flüssigkeit unter der Wirkung eines Druckes durch ein Kapillarrohr gepreßt wird, so stellt sich bekanntlich die dem stationären Zustand entsprechende Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt (im Falle des Kreisrohrs die Poiseuillesche Verteilung) erst nach einer gewissen Zeit, bzw. nach Durchlaufung einer von der Rohrmündung an gerechneten Anlaufstrecke ein, während beim Eintritt in das Rohr annähernd die ideale gleichmäßige Verteilung herrscht. Die genaue experimentelle Untersuchung dieses Anlaufvorganges, insbesondere der Druckverhältnisse, hat sich vor allem für die Zähigkeitsmessung als notwendig erwiesen, die nur dann auf Genauigkeit Anspruch erheben kann, wenn die Meßstellen des Rohres einen gewissen, von der Reynoldsschen Zahl abhängigen Abstand von der Einlauf- und Ablaufstelle besitzen, oder wenn durch ein der grundlegenden Relation zwischen Geschwindigkeit und Druck beizufügendes Korrekturglied der Tatsache Rechnung getragen wird, daß die Druckkraft die anfänglich erhebliche Grenzschichtreibung überwinden und die Beschleunigung auf der Anlaufstrecke erzeugen muß[1]).

Die vorliegende Untersuchung, die theoretischer Art ist, bezieht sich nicht eigentlich auf diesen wirklichen Anlaufvorgang; sie beschränkt sich auf die Gewinnung einer mathematisch strengen Darstellung der analogen laminaren Übergangsströmung als einer exakten Lösung der Stokes-Navierschen Differentialgleichungen, unter der Annahme, daß die reinaxial gerichtete Strömung das Rohr in seiner ganzen unendlichen Länge ausfüllt und der Querschnitt von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt ist. Wir werden dabei das Druckgefälle zunächst als konstant voraussetzen und in einem Schlußabschnitt den Ansatz auf den Fall eines zeitlich veränderlichen Druckes erweitern. In der mathematischen Durchführung, die insbesondere von der Theorie der Fourier-Besselschen Reihen Gebrauch macht, kann ich mich auf mehrere andere Arbeiten berufen, die ähnliche Methoden verwenden, insbesondere auf die Abhandlungen von P. Szymanski und G. Vogelpohl über die instationäre Strömung im Kreisrohr, die hier eine gewisse Verallgemeinerung erfahren sollen.

2. Die Differentialgleichung und der stationäre Strömungszustand in einem Hohlzylinder. Wenn wir rotationssymmetrische Begrenzung und axial gerichtete Strömung voraussetzen und den Abstand von der Achse mit r, den Reibungskoeffizienten mit μ und die kinematische Zähigkeit mit ν bezeichnen, so gilt bei einem Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial z}$ für die Geschwindigkeit $v_z = v$ die Gleichung

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Wir wollen uns zunächst auf den Fall beschränken, daß $\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$ einer Konstanten gleich ist, die wir gleich $-4c$ setzen werden. Als Querschnitt soll ein Kreisring mit dem inneren Radius b und dem äußeren Radius a angenommen werden. Das Problem möge dann so gestellt sein, daß zu Beginn der Bewegung die Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt den konstanten Wert U besitzt und daß im Laufe der Zeit der stationäre Zustand sich herausbilden soll, der durch das Gleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskraft gekennzeichnet ist. Die allgemeine, von der Zeit t unabhängige Lösung unserer Gleichung

$$\Delta v = -4c + \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1a),$$

die diesem stationären Zustand entspricht, hat die Form

$$v_1 = c\,[d^2 - r^2 + f \lg r] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Um die Haftbedingung $v = 0$ am inneren und äußeren Rand zu erfüllen, haben wir zu setzen

$$d^2 = \frac{b^2 \lg a - a^2 \lg b}{\lg \frac{a}{b}}; \qquad f = \frac{a^2 - b^2}{\lg \frac{a}{b}} \quad \ldots \ldots \ldots (2a).$$

[1]) Vgl. L. Schiller: Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für die Zähigkeitsmessung, ZAMM 2 (1922), S. 96.
Ferner Wilh. Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, Leipzig 1932, S. 58 f.
Vgl. auch H. Schlichting: Laminare Kanaleinlaufströmung, Vorträge der Hauptversammlung in Bad Pyrmont der Gesellsch. f. a. M. u. M., ZAMM Nr. 6 (1934), S. 20.

Man sieht dann, daß der Ausdruck mit $b \to 0$ in das Poiseuillesche Gesetz für das Kreisrohr

$$v_1 = c\,(a^2 - r^2)$$

übergeht. Die mittlere Geschwindigkeit u bestimmt sich aus der Beziehung

$$u \cdot \pi\,(a^2 - b^2) = 2\,\pi \int_b^a v\, r\, d\, r = 2\,\pi\, c \left[\frac{1}{2}\, d^2\, r^2 - \frac{1}{4}\, r^4 + \frac{1}{2}\, f\, r^2 \left(\lg r - \frac{1}{2}\right)\right]_b^a.$$

Nach Einsetzung der Grenzen und Einführung der dimensionslosen Größen $\frac{b}{a} = q$; $\frac{r}{a} = \varrho$ ergibt sich mit

$$\varepsilon = 1 + q^2 - \frac{1 - q^2}{\lg \frac{1}{q}}$$

für u der Wert

$$u = \frac{c\, a^2}{2}\, \varepsilon$$

und damit für die Geschwindigkeitsfunktion der Ausdruck

$$\frac{v}{u} = \frac{(1 - \varrho^2) \lg \frac{1}{q} - (1 - q^2) \lg \frac{1}{\varrho}}{(1 + q^2) \lg \frac{1}{q} - (1 - q^2)} = \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \varrho^2 - (1 - q^2)\, \frac{\lg \frac{1}{\varrho}}{\lg \frac{1}{q}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die charakteristische Größe ε, die in der Tabelle berechnet ist, wächst vom Werte Null für $q = 1$ bis zum Werte Eins für den Fall $q = 0$ des Kreiszylinders. Wir haben in der Abb. 1 die Geschwindigkeitsverteilung für einige Werte von q bei konstant bleibendem a zur Darstellung gebracht. Man erkennt, daß die Unsymmetrie über die Ringbreite $a - b$ um so größer ist, je kleiner das Verhältnis q wird, bis sich im Falle $b = 0$ die beiden einem Meridianschnitt entsprechenden Zweige der Verteilungskurve in der Achse zur Poiseuilleschen Parabel zusammenschließen.

Tabelle für die Größe ε

q	ε
0	1
0,1	0,58
0,2	0,443
0,4	0,24
0,5	0,17
0,6	0,114
0,8	0,02
1,0	0

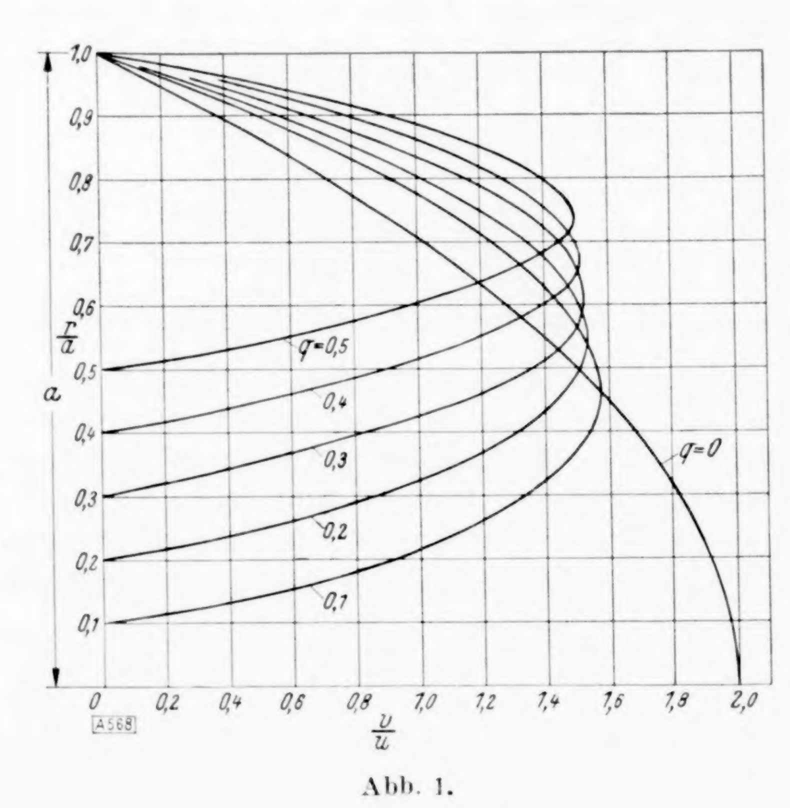


Abb. 1.

3. Die vollständige instationäre Lösung für den Hohlzylinder. Als Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta v = \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,c)$$

nehmen wir eine Reihendarstellung von der Form

$$v_2 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i\, e^{-\lambda_i^2 \nu t}\, Z_0(\lambda_i\, r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

in der jedes Glied in einen Zeitfaktor und einen Ortsfaktor zerlegt ist und $Z_0(x)$ eine noch näher zu bestimmende Zylinderfunktion nullter Ordnung bedeutet. Dann ist jedenfalls

$$v = v_1 + v_2$$

eine Lösung der nicht-homogenen Gl. (1), die unseren Bedingungen angepaßt werden kann. Von der Lösung ist zu verlangen, daß sie für alle Werte $t \neq 0$ für $r = b$, $r = a$ verschwindet und für $t \to 0$ in die Funktion

$$(v_2)_{t \to 0} = U - v_1 \qquad (5)$$

übergeht. Dann wird unter der Voraussetzung der Konvergenz die resultierende Geschwindigkeit in dem Zeitintervall $t = 0$ bis $t = \infty$ einen Übergang von der Anfangsverteilung $v = U$ in den stationären Endzustand $v = v_1$ darstellen. Als Zylinderfunktion benutzen wir nun eine lineare Verbindung der gewöhnlichen Besselschen Funktion $J_0(\lambda r)$ erster Art und der Funktion $Y_0(\lambda r)$ nullter Ordnung zweiter Art. Für die allgemeine Funktion $Y_n(x)$ gilt die Reihendarstellung

$$\left.\begin{aligned} Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\Big\{ & J_n(x) \lg \frac{x\gamma}{2} - J_n(x)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ & - \frac{n!}{2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{n-s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-s} \frac{J_s(x)}{s!} - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{n+2s}{s(n+s)} J_{n+2s}(x)\Big\} \end{aligned}\right\} \qquad (6),$$

in der $\lg \frac{2}{\gamma} = 0{,}11593$ zu setzen ist und die rechts stehenden Funktionen die gewöhnlichen Funktionen erster Art bezeichnen. Wie man sieht, besitzt die Funktion im Nullpunkt $x = 0$ eine logarithmische Singularität, die aber in unserem Falle wegen $x = \lambda r$ und $\lambda > 0$, $r > 0$ ausgeschlossen ist. Um die Haftbedingung zu erfüllen, setzen wir nun[2])

$$Z_0(\lambda r) = \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda b)} - \frac{Y_0(\lambda r)}{Y_0(\lambda b)} = \frac{S_0(\lambda r)}{J_0(\lambda b) \cdot Y_0(\lambda b)} \qquad (7).$$

Die Funktion verschwindet zunächst für $r = b$. Setzen wir aber weiter fest, daß die Parameter λ die Wurzeln der Gleichung

$$J_0(\lambda a)\, Y_0(\lambda b) - J_0(\lambda b)\, Y_0(\lambda a) = 0 \qquad (8)$$

sind, so ist auch die zweite Randbedingung erfüllt[3]). Übrigens kann man statt $Z_0(\lambda r)$ auch die „komplementäre" Funktion

$$\bar{Z}_0(\lambda r) = \frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda a)} - \frac{Y_0(\lambda r)}{Y_0(\lambda a)}$$

benutzen. Es bleibt dann nur noch übrig, die Koeffizienten A_i der Bessel-Fourierschen Entwicklung der Forderung (5) oder der Beziehung

$$U - c\,[d^2 - r^2 + f \log r] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i\, Z_0(\lambda_i r) \qquad (9)$$

anzupassen. Zu dem Zwecke benutzen wir die für jede Zylinderfunktion gültigen Integralformeln

$$\left.\begin{aligned} \int r\, Z_n(\lambda_i r)\, Z_n(\lambda_k r)\, dr &= \frac{r}{\lambda_2^2 - \lambda_k^2}\left\{\lambda_i Z_{n+1}(\lambda_i r)\, Z_n(\lambda_k r) - \lambda_k Z_n(\lambda_i r)\, Z_n(\lambda_k r)\right\} \\ \int r\, Z_n^2(\lambda_k r)\, dr &= \frac{1}{2} r^2 \left\{\left(1 - \frac{n^2}{(\lambda_k r)^2}\right) Z_n^2(\lambda_k r) + Z_n'^2(\lambda_k r)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (10).$$

Setzen wir die Gültigkeit von (8) voraus, so ergibt sich in unserem Falle wegen $Z_0'(x) = -Z_1(x)$

$$\left.\begin{aligned} \int_b^a r\, Z_0(\lambda_i r)\, Z_0(\lambda_k r)\, dr &= 0 \qquad (\text{für } i \neq k) \\ \int_b^a r\, Z_0^2(\lambda_k r)\, dr &= \frac{1}{2} a^2 Z_1^2(\lambda_k a) - \frac{1}{2} b^2 Z_1^2(\lambda_k b) \end{aligned}\right\} \qquad (11),$$

[2]) Vgl. A. Gray and G. B. Mathews: A Treatise on Bessel Functions, London 1922, S. 116.

[3]) Vgl. A. Kalähne: Über die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54 (1907), S. 55. — H. S. Carslaw, Conduction of heat, London 1922, S. 128. Hier findet sich der Beweis, daß die Wurzeln von (7) alle reell sind, wenn $\frac{b}{a}$ reell ist.

wo allgemein

$$Z_n(\lambda r) = \frac{J_n(\lambda r)\, Y_0(\lambda b) - Y_n(\lambda r)\, J_0(\lambda b)}{J_0(\lambda b)\, Y_0(\lambda b)} = \frac{S_n(\lambda r)}{J_0(\lambda b)\, Y_0(\lambda b)}$$

einzuführen ist. Multiplizieren wir (9) mit $r\, Z_0(\lambda_k r)$ und integrieren über das Intervall $r = b$ bis $r = a$, so erhalten wir die Gleichung

$$\int_b^a [U - c(d^2 - r^2 + f \log r)]\, r\, Z_0(\lambda_k r)\, dr = \frac{1}{2} A_k [a^2 Z_1^2(\lambda_k a) - b^2 Z_1^2(\lambda_k b)] \quad . \quad . \quad (12)$$

zur Bestimmung der Konstanten A_k. Um die Integration auf der linken Seite auszuführen, benutzen wir die bekannten Formeln für Besselsche Funktionen[4])

$$d[x^n Z_n(x)] = x^n Z_{n-1}(x), \quad \text{bzw.} \quad d[r^n \cdot Z_n(\lambda r)] = \lambda r^n Z_{n-1}(\lambda r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Damit ergibt sich

$$\int_b^a r\, Z_0(\lambda_k r)\, dr = \frac{1}{\lambda_k} [a\, Z_1(\lambda_k a) - b\, Z_1(\lambda_k b)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Ferner erhält man durch partielle Integration

$$\left.\begin{aligned} \int_b^a r^3 Z_0(\lambda_k r)\, dr &= \frac{1}{\lambda_k} \int_b^a r^2 d\left[r\, Z_1(\lambda_k r)\right] = \frac{1}{\lambda_k}\left[r^3 Z_1(\lambda_k r)\right]_b^a - \frac{2}{\lambda_k} \int r^2 Z_1(\lambda_k r)\, dr \\ &= \frac{1}{\lambda_k}\left[r^3 Z_1(\lambda_k r)\right]_b^a - \frac{2}{\lambda_k^2}\left[r^2 Z_2(\lambda_k r)\right]_b^a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

In ähnlicher Weise folgt durch Benutzung von (13) und der Randbedingung

$$\left.\begin{aligned} \int_b^a r \log r\, Z_0(\lambda_k r)\, dr &= \frac{1}{\lambda_k}\left[\log r \cdot r\, Z_1(\lambda_k r)\right]_b^a - \frac{1}{\lambda_k} \int_b^a Z_1(\lambda_k r)\, dr \\ &= \frac{1}{\lambda_k}\left[r \log r \cdot Z_1(\lambda_k r)\right]_b^a + \frac{1}{\lambda_k^2}\left[Z_0(\lambda_k r)\right]_b^a \\ &= \frac{1}{\lambda_k}\left[r \log r \cdot Z_1(\lambda_k r)\right]_b^a \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die linke Seite der Gl. (12) geht daher über in

$$(U - c\, d^2) \frac{1}{\lambda_k} [a\, Z_1(\lambda_k a) - b\, Z_1(\lambda_k b)] + \frac{c\, a^3}{\lambda_k} Z_1(\lambda_k a) - \frac{c\, b^3}{\lambda_k} Z_1(\lambda_k b) - \frac{2\, c}{\lambda_k^2} [a^2 Z_2(\lambda_k a) - b^2 Z_2(\lambda_k b)]$$
$$- \frac{c\, f}{\lambda_k} [a \log a \cdot Z_1(\lambda_k a) - b \log b \cdot Z_1(\lambda_k b)]\,.$$

Setzt man die unter (2a) angegebenen Werte von d^2 und f ein, so heben sich die logarithmischen Glieder heraus, und es bleibt

$$\frac{U}{\lambda_k} [a\, Z_1(\lambda_k a) - b\, Z_1(\lambda_k b)] - \frac{2\, c}{\lambda_k^2} [a^2 Z_2(\lambda_k a) - b^2 Z_2(\lambda_k b)] = \frac{1}{2} A_k [a^2 Z_1^2(\lambda_k a) - b^2 Z_1^2(\lambda_k b)] \quad (17).$$

Benutzen wir ferner die bekannte Beziehung

$$Z_0(x) + Z_2(x) = \frac{2}{x} Z_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

in Verbindung mit $Z_0(\lambda_k a) = 0$ und setzen für c den oben gefundenen Wert $c = \dfrac{2\, u}{\varepsilon\, a^2}$ ein, so erhalten wir für A_k nach Kürzung mit $a\, Z_1(\lambda_k a) - b\, Z_1(\lambda_k b)$

$$A_k = \frac{\dfrac{2}{\lambda_k}\left[U - \dfrac{8\, u}{\varepsilon\, (\lambda_k a)^2}\right]}{a\, Z_1(\lambda_k a) + b\, Z_1(\lambda_k b)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

[4]) G. N. Watson: A treatise on Bessel functions, Cambr. 1922, S. 134 und 135.

Damit entsteht aus (4) für die resultierende Geschwindigkeit unter Voraussetzung der Konvergenz der Ausdruck

$$v = \frac{2u}{\varepsilon a^2}\left[a^2 - r^2 - \frac{(a^2-b^2)\lg\frac{a}{r}}{\lg\frac{a}{b}}\right] + 2\sum_{i=1}^{\infty}\left[U - \frac{8u}{\varepsilon(\lambda_i a)^2}\right]\frac{Z_0(\lambda_i r)\, e^{-\lambda_i^2 \nu t}}{\lambda_i a\, Z_1(\lambda_i a) + \lambda_i b\, Z_1(\lambda_i b)},$$

wo k wieder durch i ersetzt wird und die Summe über alle Nullstellen der Funktion (8) zu erstrecken ist. Mit den dimensionslosen Größen $\frac{b}{a} = q$, $\frac{r}{a} = \varrho$, $\lambda_i a = s_i$, $\tau = \frac{\nu t}{a^2}$ erhalten wir daraus

$$\frac{v}{u} = \frac{2}{\varepsilon}\left[1 - \varrho^2 - \frac{(1-q^2)\lg\frac{1}{\varrho}}{\lg\frac{1}{q}}\right] + 2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{U}{u} - \frac{8}{\varepsilon s_i^2}\right)\frac{Z_0(\varrho s_i)\, e^{-s_i^2 \tau}}{s_i\,[Z_1(s_i) + q\, Z_1(q s_i)]} \quad . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Führt man jetzt statt Z_0 und Z_1 wieder die Funktionen S_0 und S_1 bzw. J und Y ein und beachtet (8) in der Form

$$\frac{J_0(s_i)}{J_0(q s_i)} = \frac{Y_0(s_i)}{Y_0(q s_i)}$$

und die weitere Beziehung[5])

$$J_1(x)\, Y_0(x) - J_0(x)\, Y_1(x) = \frac{2}{\pi x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21),$$

so wird der Nenner in dem Reihenglied

$$s_i\,[S_1(s_i) + q\, S_1(q s_i)] = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{J_0(q s_i)}{J_0(s_i)}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Die Geschwindigkeitsfunktion vereinfacht sich daher zu

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{u} &= \frac{2}{\varepsilon}\left[1 - \varrho^2 - \frac{(1-q^2)\lg\frac{1}{\varrho}}{\lg\frac{1}{q}}\right] \\ &+ \pi\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{U}{u} - \frac{8}{\varepsilon s_i^2}\right)\frac{J_0(s_i)\,[J_0(\varrho s_i)\, Y_0(q s_i) - Y_0(\varrho s_i)\, J_0(q s_i)]}{J_0(s_i) + J_0(q s_i)}\, e^{-\tau s_i^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23).$$

Wenn man statt $S(\varrho s, q s)$ die Funktion $\bar{S} = S(\varrho s, s)$ einführt, so gelangt man auf Grund der einfach ableitbaren Beziehung

$$J_0(s_i)\, S_0(s_i \varrho) = J_0(q s_i) \cdot \bar{S}_0(s_i \varrho)$$

zu dem gleichen Ausdruck. Ferner ist es auch möglich, an Stelle von Y_0 die Hankelsche Funktion $H_0^{(1)} = J_0 + i\, Y_0$ zu benutzen[6]). Man sieht dann, daß die entsprechend gebildete Verbindung

$$J_0(s)\, H_0^{(1)}(q s) - J_0(q s) \cdot H_0^{(1)}(s)$$

die gleichen Wurzeln hat wie die oben benutzte Funktion

$$J_0(s)\, Y_0(q s) - J_0(q s)\, Y_0(s)\,.$$

Zur zahlenmäßigen Ausrechnung benötigt man vor allem die Nullstellen der Funktion $S(s, q s)$, die für einige Werte von q von Kalähne bestimmt und in den Jahnke-Emdeschen Tabellen wiedergegeben sind. Wir haben den Wert $q = 0{,}5$ zugrunde gelegt und die Funktionswerte aus den Tabellenwerken von Jahnke-Emde, Hayashi und Watson entnommen, bzw. für größere Argumente (> 25) nach den bekannten Näherungsformeln neu bestimmt. Es zeigt sich, daß für die kleineren Zeitwerte ($\tau = 0{,}001$ bis $0{,}005$) etwa sechs bis sieben Glieder der Reihe erforderlich sind, um einen bis zur zweiten oder dritten Dezimalen genauen Wert der Geschwindigkeit zu erhalten, während etwa bei $\tau = 0{,}05$ bereits ein Glied genügt. Die Ergebnisse im Falle $U = u$ sind in der beigegebenen Tabelle und in der Abb. 2 wiedergegeben.

[5]) Vgl. G. N. Watson: a. a. O. S. 77.
[6]) Vgl. H. S. Carslaw: Conduction of heat, London 1921, S. 127.

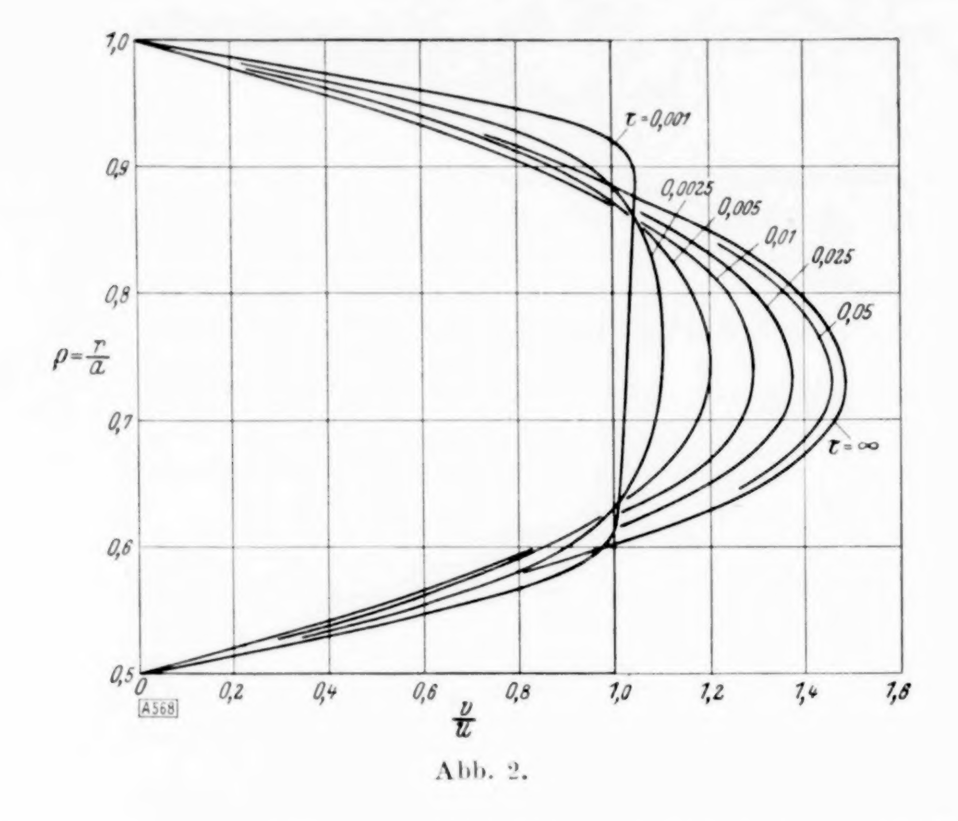


Abb. 2.

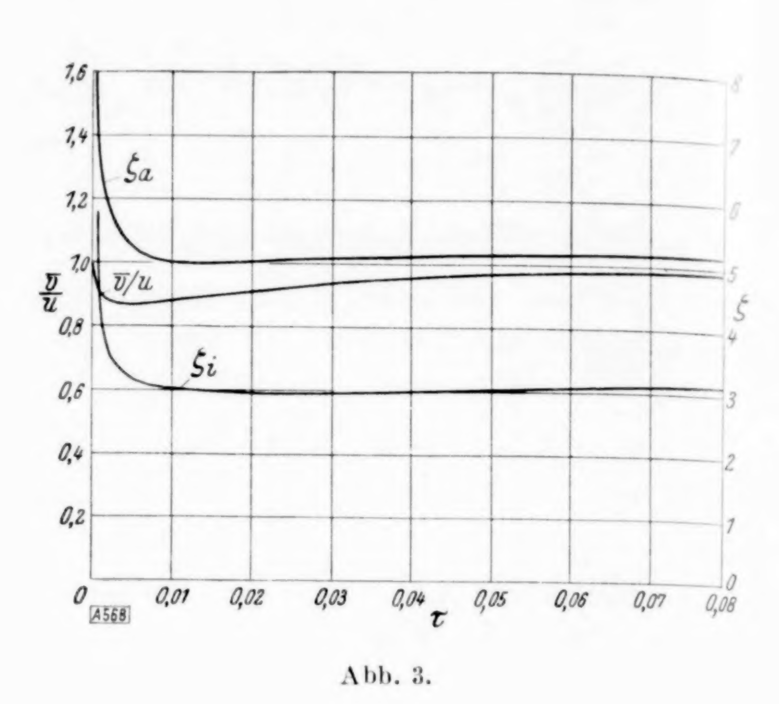


Abb. 3.

Tabelle für die Geschwindigkeitsverteilung $\frac{v}{u}$ der Anlaufströmung in einem Hohlzylinder $\left(q = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad U = u\right)$.

τ \ ϱ	0,55	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	1	1	1	1	1	1
0,001	0,63	0,974	1,01	1,03	1,05	0,74
0,0025	0,565	0,897	1,09	1,093	0,953	0,601
0,005	0,51	0,845	1,174	1,16	0,868	0,515
0,01	0,493	0,850	1,27	1,23	0,825	0,476
0,025	0,52	0,899	1,35	1,29	0,852	0,485
0,05	0,54	0,951	1,43	1,36	0,897	0,503
∞	0,56	0,970	1,46	1,39	0,912	0,514

Zur Berechnung möge noch bemerkt werden, daß für größere Argumente folgende asymptotische Darstellung herangezogen werden kann:

$$J_0(x) \sim \frac{\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \sim -Y_1(x); \quad J_1(x) \sim \frac{\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \sim Y_0(x) \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Daraus folgt z. B.

$$S_1(s, qs) = J_1(s)\,Y_0(qs) - J_0(qs)\,Y_1(s) \sim \frac{\cos s\,(1-q)}{\frac{1}{2}\pi s\sqrt{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Da ferner

$$J_0(s)\,Y_0(qs) - J_0(qs)\,Y_0(s) = 0 \sim \frac{\sin s\,(1-q)}{\frac{1}{2}\pi s\sqrt{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

so ergibt sich

$$S_1(s) \sim \pm \frac{2}{\pi s\sqrt{q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Daher kann man z. B. für den Nenner in der im Geschwindigkeitsausdruck auftretenden Reihe angenähert setzen

$$s\,[S_1(s) + q\,S_1(qs)] \sim \frac{2}{\pi}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{q}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

In unserem Falle haben wir mit $q=\frac{1}{2}$ abwechselnd die Werte $-\frac{2}{\pi}\,0{,}414=-0{,}264$ und $\frac{2}{\pi}\,2{,}414=1{,}54$. Man stellt fest, daß diese Werte bereits bei den ersten Wurzeln ($s_1=6{,}245$, $s_2=12{,}547$) mit großer Annäherung zutreffen.

Die graphische Darstellung zeigt, daß sich im ersten Stadium der Bewegung ähnlich wie beim wirklichen Anlaufvorgang zwei Gebiete ziemlich scharf voneinander abheben, das der Wand benachbarte Gebiet, in dem die Geschwindigkeit vom Randwerte Null steil ansteigt, und das mittlere Gebiet, wo das Geschwindigkeitsprofil einen fast geradlinigen Verlauf zeigt, der allerdings wegen der Ungleichheit der Reibung am inneren und äußeren Rand von der Querrichtung etwas abweicht. Unter dem Einfluß der Reibung findet ein Ausgleich beider Gebiete statt, derart, daß sich die ringförmige Grenzschicht mehr und mehr vergrößert und schließlich über den ganzen Querschnitt ausbreitet, während die Geschwindigkeitsverteilung einen parabelartigen Charakter annimmt. Dieser Endzustand wird zwar erst nach theoretisch unendlich langer Zeit hergestellt; die Berechnung zeigt aber, daß bereits für $\tau=0{,}05$ etwa 97% der Endgeschwindigkeit erreicht ist. Das würde bei einem Rohrradius $a=0{,}4$ cm und einer Zähigkeitszahl $\nu=0{,}01\ \mathrm{cm^2/sek}$ der Zeit $t=\frac{a^2\tau}{\nu}=0{,}8$ sek entsprechen. Die Wirkung der Reibung spricht sich vor allem darin aus, daß die mittlere Geschwindigkeit nicht mehr konstant bleibt, wenn der Anfangswert U dem Endwert u gleichgesetzt wird. Wir erhalten den Mittelwert nach der Formel

$$\bar v=\frac{2\pi}{\pi(a^2-b^2)}\int_b^a v\,r\,d\,r=\frac{2}{1-q^2}\int_q^1 v\,\varrho\,d\,\varrho\,.$$

Eine elementare Rechnung ergibt

$$\frac{\bar v}{u}=1+\frac{4}{1-q^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{8}{\varepsilon\,s_i^2}\right)\frac{J_0(q\,s_i)-J_0(s_i)}{s_i^2\,[J_0(q\,s_i)+J_0(s_i)]}\,e^{-\tau\,s_i^2}\quad\ldots\ldots\quad(29).$$

Mit guter Annäherung läßt sich (28) zufolge dafür setzen

$$\frac{\bar v}{u}=1+\frac{4}{1-q^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{8}{\varepsilon\,s_i^2}\right)\frac{1-(-1)^i\sqrt{q}}{s_i^2\,(1+(-1)^i\sqrt{q}}\,e^{-\tau\,s_i^2}.$$

Dieses Verhältnis ist in der Abb. 3 in Abhängigkeit von τ dargestellt. Man erkennt, daß die mittlere Geschwindigkeit im ersten Augenblick der Bewegung, wo die Reibung und daher die Verzögerung unendlich groß sind, stark abfällt, sehr bald ein Minimum etwa von der Größe 0,88 erreicht, um dann allmählich auf den Grenzwert u anzusteigen.

Für die am äußeren und inneren Zylinderrand wirkende, auf die Längeneinheit des Zylinders bezogene Reibung erhält man mit Benutzung der Beziehungen

$$s\,q\,S_1(s\,q)=\frac{2}{\pi}\,;\quad s\,S_1(s)=\frac{2}{\pi}\,\frac{J_0(q\,s)}{J_0(s)}$$

die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}R_a&=2\pi\mu a\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a}=4\pi\mu u\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{1-q^2}{\lg\frac{1}{q}}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{8}{\varepsilon\,s_i^2}\right)\frac{J_0(q\,s_i)\,e^{-\tau\,s_i^2}}{J_0(s_i)+J_0(q\,s_i)}\right\}\\R_i&=2\pi\mu b\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=b}=4\pi\mu u\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1-q^2}{\lg\frac{1}{q}}-2q^2\right)-\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{8}{\varepsilon\,s_i^2}\right)\frac{J_0(s_i)\,e^{-\tau\,s_i^2}}{J_0(s_i)+J_0(q\,s_i)}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(30),$$

die als Funktion der Zeit τ in der Abb. 3 veranschaulicht sind. Die Reibungszahlen $\frac{R_a}{4\pi\mu u}=\zeta_a$ und $\frac{R_i}{4\pi\mu u}=\zeta_i$ werden für $\tau=0$ unendlich groß, sinken sehr schnell bis auf ihre Minimalbeträge und erreichen für $\tau\to\infty$ asymptotisch die Grenzwerte $\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{1-q^2}{\lg\frac{1}{q}}\right)$ und $\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1-q^2}{\lg\frac{1}{q}}-2q^2\right)$, also in unserem Falle mit $q=\frac{1}{2}$ die Werte 5,4 und 3,41.

4. Anlaufströmung im Kreisrohr [7]). Wenn der Innenradius des Rohres Null wird ($b = 0$, $q = 0$), so geht, da $J_0(0) = 1$ und $Y_0(0)$ logarithmisch unendlich wird, die Funktion Z_0 in die gewöhnliche Besselsche Funktion J_0 über. Da ferner mit $\varepsilon = 1$ der stationäre Endzustand durch die Geschwindigkeitsverteilung $v_1 = 2u(1 - \varrho^2)$ gegeben ist, so gewinnt man für den ganzen Bewegungsverlauf den Ausdruck

$$v = 2u\left\{1 - \frac{r^2}{a^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{U}{u} - \frac{8}{(\lambda_i a)^2}\right)\frac{J_0(\lambda_i r)}{\lambda_i a J_1(\lambda_i a)} e^{-\lambda_i^2 \nu t}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{v}{u} = 2\left\{1 - \varrho^2 + \sum\left(\frac{U}{u} - \frac{8}{s_i^2}\right)\frac{J_0(s_i \varrho)}{s_i J_1(s_i)} e^{-\tau s_i^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31\,\text{a}),$$

wo die Summe über alle Nullstellen s_i der Besselschen Funktion J_0 zu erstrecken ist.

Tabelle für die Geschwindigkeitsverteilung der Anlaufströmung im Kreisrohr.

τ \ ϱ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0	1	1	1	1	1	1
0,005	1,058	1,058	1,057	1,046	1,00	0,72
0,0125	1,102	1,101	1,10	1,068	0,861	0,57
0,025	1,20	1,20	1,19	1,10	0,74	0,41
0,05	1,39	1,37	1,296	1,09	0,662	0,375
0,1	1,62	1,57	1,41	1,11	0,63	0,355
0,25	1,86	1,78	1,57	1,20	0,68	0,341
0,5	1,97	1,89	1,65	1,26	0,71	0,38
∞	2,00	1,92	1,68	1,28	0,72	0,38

Wir haben auch die diesem Ausdruck entsprechende Verteilung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von τ für den besonderen Fall $U = u$ ausgerechnet und in Abb. 4 graphisch veranschaulicht. Die Art des Überganges in den Poisseuilleschen Endzustand stimmt im wesentlichen mit den Verhältnissen beim kreisringartigen Querschnitt überein. Es ergibt sich dabei, daß für $\tau = 0{,}5$, also bei einem Kreisrohr von $a = 0{,}2$ cm und einer Zähigkeit $\nu = 0{,}01$ cm²/s, d. h. also nach zwei Sekunden die Geschwindigkeit bereits 98,5 % des Endwertes erreicht hat. Für die mittlere Geschwindigkeit entsteht aus (29) der Ausdruck

$$\frac{\bar{v}}{u} = 1 + 4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{U}{u} - \frac{8}{s_i^2}\right)\frac{1}{s_i^2} e^{-\tau s_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32),$$

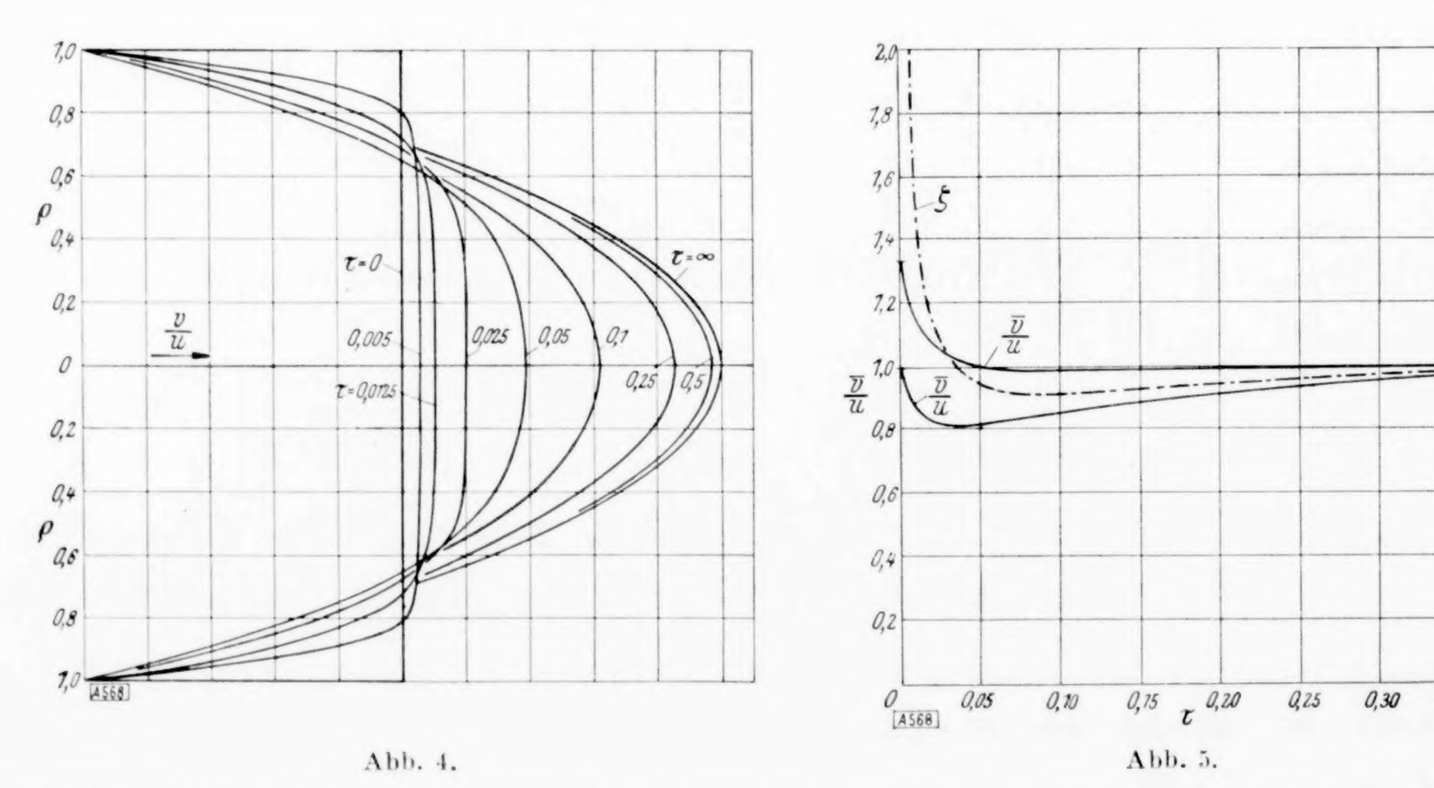


Abb. 4. Abb. 5.

[7]) Vgl. P. Szymanski: Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique, Journal math. pures et appl., Paris 1932, S. 67. — G. Aresi: Sul moto di un fluido viscoso, incompressibile, lungo un tubo cilindrico, Rend. Semin. Fac. Sci Univ. Cagliari, 4 (1934), S. 91—93.

während die mittlere Beschleunigung den Wert hat

$$\bar{b} = -\frac{4\,\nu\,u}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{U}{u}-\frac{8}{s_i^2}\right)e^{-\tau s_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Da für $U=u$ der Mittelwert für $\tau \to 0$ sich dem Werte u nähert, so erhält man als Nebenresultat folgende Relation zwischen den Nullstellen

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_i^2}-\frac{8}{s_i^4}\right)=0,$$

die in Übereinstimmung steht mit den bekannten Lord Rayleighschen Formeln

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s_i^2}=\frac{1}{4}; \qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s_i^4}=\frac{1}{32}.$$

Für die Abweichung des Mittelwertes gegenüber dem Anfangs- und Endwert $U=u$ ergibt sich

$$\Delta v = 4\,u\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_i^2}-\frac{8}{s_i^4}\right)e^{-\tau s_i^2}.$$

Wenn die anfängliche und mittlere Endgeschwindigkeit als gleich angenommen werden, so zeigt sich auch hier wieder, daß im ersten Stadium der Bewegung eine Verzögerung eintritt, die als Äquivalent der Arbeit anzusehen ist, die erforderlich ist, um die der Wand aufliegende Grenzschicht, bzw. die hier ansässige Wirbelenergie zu überwinden. Das Minimum der Geschwindigkeit, das etwa die Größe $\bar{v}=0{,}83\,u$ hat, entspricht dem Zeitwerte $\tau=0{,}035$. Um zu erreichen, daß die mittlere Geschwindigkeit von einem gewissen Augenblick an ungefähr konstant bleibt, muß das Verhältnis $\frac{U}{u}$ etwa gleich 1,34 bis 1,36 angenommen werden. Der dem Verhältnis 1,34 entsprechende Verlauf ist in der Abb. 5 dargestellt worden.

Aus dem örtlichen Mittelwert kann man ferner den mittleren von der Flüssigkeit zurückgelegten Weg berechnen. Es wird

$$z=\int_0^t \bar{v}\,d\,t=\frac{a^2}{\nu}\int_0^\tau \bar{v}\,d\,\tau.$$

Führen wir die Reynoldssche Zahl $\Re=\frac{a\,u}{\nu}$ ein, so haben wir

$$z=a\,\Re\left[\tau+4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s_i^4}-\frac{8}{s_i^6}\right)(1-e^{-\tau s_i^2})\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

Dividiert man durch die Zeit $t=\frac{a^2\,\tau}{\nu}$, so erhält man weiter den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit in der Form

$$\frac{v_m}{u}=1+\frac{4}{\tau}\sum_{i=1}^{\infty}(1-e^{-\tau s_i^2})\left(\frac{1}{s_i^4}-\frac{8}{s_i^6}\right).$$

Ferner ergibt sich für die Stärke des Ringwirbels, der für die Reibung bestimmend ist,

$$w=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{2\,a}\frac{\partial v}{\partial \varrho}=\frac{u}{a}\left[2\,\varrho+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_1(\varrho\,s_i)}{J_1(s_i)}\left(1-\frac{8}{s_i^2}\right)e^{-\tau s_i^2}\right].$$

Die auf die Längeneinheit des Zylinders bezogene Randreibung wird dann

$$R = 4\pi\mu u \zeta = 4\pi\mu u\left[2\varrho + \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{8}{s_i^2}\right)e^{-\tau s_i^2}\right].$$

Die Wirbelverteilung $\frac{w\,a}{u}$ ist für verschiedene Zeitpunkte in der Abb. 6 dargestellt. Sie zeigt einen Übergang von der anfänglichen Verteilung $w = 0$ für $\varrho < 1$, bzw. $w = \infty$ für $\varrho = 1$ in die Poiseuillesche lineare Verteilung $\frac{w\,a}{u} = 2\varrho$. Der Koeffizient $\zeta = \frac{R}{4\pi\mu u}$ der Randreibung ist anfangs unendlich groß, nimmt dann sehr schnell ab und erreicht bei $\tau = 0{,}036$ einen Kleinstwert und nähert sich dann asymptotisch dem Grenzwerte 2.

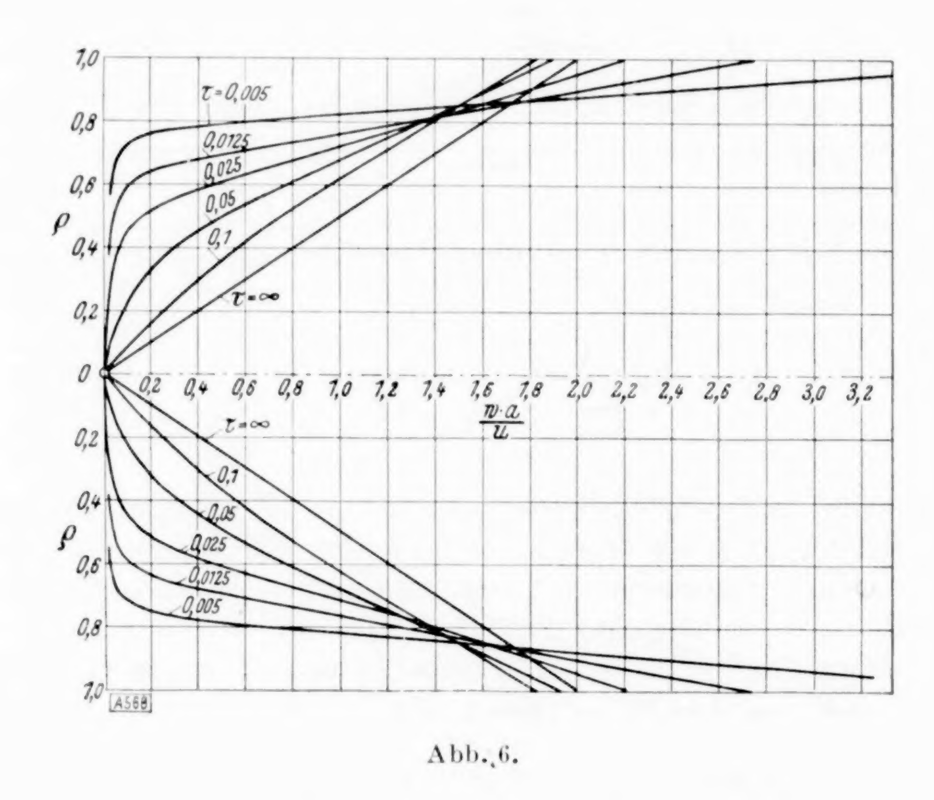


Abb. 6.

5. Rohrströmung bei zeitlich veränderlichem Druckgefälle. Zum Zwecke der Anwendung auf einige interessante Fragestellungen wollen wir einen vorbereitenden Ansatz geben für den allgemeinen Fall des veränderlichen Druckes. Indem wir das gesamte Druckgefälle in einen konstanten und einen von der Zeit abhängigen Teil zerlegen, soll die Differentialgleichung in der dimensionslosen Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} = -4c' - F(\tau) + \frac{\partial v}{\partial \tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

zugrunde gelegt werden, wo $c' = c\,a^2$ zu setzen ist, und als Querschnitt des Rohres zunächst wieder ein Kreisring mit den Radien a und b angenommen werden. Um die Lösung der Gleichung zu finden, die sich von (35) durch das Fehlen der Konstanten unterscheidet, benutzen wir die aus den früheren Entwicklungen hervorgehende Identität

$$F(\tau) = 2F(\tau)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{S_0(\varrho s_i)}{s_i S_1(s_i) + q s_i S_1(q s_i)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

und gehen außerdem mit dem Ansatz

$$v_3 = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(\tau)\, S_0(\varrho s_i)\, e^{-\tau s_i^2}$$

unter der Voraussetzung, daß die Konstanten B_i von der Zeit τ abhängen, in die Gleichung hinein[8]). Es entsteht dann für das i-te Glied

$$B_i e^{-\tau s_i^2}\cdot\Delta S_0(\varrho s_i) = -2F(\tau)\frac{S_0(\varrho s_i)}{s_i S_1(s_i) + q s_i S_1(q s_i)} - s_i^2 B_i e^{-\tau s_i^2} S_0(\varrho s_i) + \frac{d B_i}{d\tau}e^{-\tau s_i^2} S_0(\varrho s_i)$$

[8]) Vgl. auch Wilh. Müller: Einige instationäre Bewegungen der zähen Flüssigkeit unter zylindrischer Begrenzung, Annalen der Physik, 5. F., Bd. 25 (1935), S. 185 bis 204, insbes. S. 200; ferner ZAMM Bd. 15, 1935, S. 372 bis 3.. (Vorträge der Hauptversammlung, Stuttgart).

und daraus wegen

$$\Delta S_0 = -s^2 S_0$$

folgender Ausdruck für B_i

$$B_i = \frac{2}{s_i S_1(s_i) + q s_i S_1(q s_i)} \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und mithin die gesuchte Lösung[9])

$$v_3 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_0(\varrho s_i) e^{-\tau s_i^2}}{s_i S_1(s_i) + q s_i S_1(q s_i)} \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d\tau = \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i) S_0(\varrho s_i) e^{-\tau s_i^2}}{J_0(s_i) + J_0(q s_i)} \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d\tau \quad (38).$$

Wenn die Geschwindigkeit am Anfang über den Querschnitt konstant und gleich U gesetzt wird, so ergibt sich die vollständige Lösung durch Verbindung von (38) mit (23). Man erhält

$$v = \frac{2u}{\varepsilon}\left[1 - \varrho^2 - (1 - q^2)\frac{\lg \frac{1}{\varrho}}{\lg \frac{1}{q}}\right] + \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i) S_0(\varrho s_i) e^{-\tau s_i^2}}{J_0(s_i) + J_0(q s_i)} \left[\frac{U}{u} - \frac{8}{\varepsilon s_i^2} + \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d\tau\right] \quad (39).$$

Die mittlere Geschwindigkeit wird dagegen

$$\bar{v} = u + \frac{4}{1 - q^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[J_0(q s_i) - J_0(s_i)] e^{-\tau s_i^2}}{s_i^2 [J_0(q s_i) + J_0(s_i)]} \left(U - \frac{8u}{\varepsilon s_i^2} + \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d\tau\right) \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Für den Fall des Kreiszylinders gehen diese Ausdrücke über in

$$v = 2u(1 - \varrho^2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho s_i)}{s_i J_1(s_i)} e^{-\tau s_i^2} \left(U - \frac{8u}{s_i^2} + \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41),$$

$$\bar{v} = u + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{s_i^2} e^{-\tau s_i^2} \left(U - \frac{8u}{s_i^2} + \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

wo im ersten Falle über den Nullstellen der Funktion (8), im zweiten Falle über den Nullstellen der Funktion $J_0(s_i)$ zu summieren ist. Damit die mittlere Geschwindigkeit während der ganzen Zeitdauer der Bewegung unverändert bleibt, muß die Funktion $F(\tau)$ der Integralgleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(q s_i) - J_0(s_i)}{s_i^2 (J_0(q s_i) + J_0(s_i))} e^{-\tau s_i^2} \left(1 - \frac{8}{\varepsilon s_i^2} + \int_0^\tau F(\tau) e^{\tau s_i^2} d\tau\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

genügen, deren Lösung für den besonderen Fall $b = 0$ von Vogelpohl angegeben ist. Indem wir die weitere Behandlung der einschlägigen Fragen auf eine spätere Gelegenheit verschieben, weisen wir nur kurz auf die beiden wichtigsten Funktionengruppen hin, die einem exponentiell abnehmendem und einem periodisch veränderlichem Druckgefälle entsprechen.

a) Wenn F die Form $F(\tau) = w\, e^{-\alpha^2 \tau}$ hat, so ergibt sich für den maßgebenden Teil der Lösung der Ausdruck

$$v_3 = 2w \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho s_i)(e^{-\tau s_i^2} - e^{-\tau \alpha^2})}{J_1(s_i) s_i (\alpha^2 - s_i^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

[9]) Vgl. auch G. Vogelpohl: Über die Ermittlung der Rohreinlaufströmung aus den Stokes-Navierschen Gleichungen. ZAMM. 6 (1933), S. 25. (Vorträge der Hauptversammlung in Würzburg d. Ges. f. a. M. u. M.)

Wenn a einer der Nullstellen, z. B. s_k gleich wird, so ist, wie ein einfacher Grenzübergang zeigt, das entsprechende Reihenglied durch

$$2\,w\,\frac{J_0(\varrho\, s_k)}{s_k\, J_1(s_k)}\cdot \tau\, e^{-\tau s_k^2}$$

zu ersetzen.

b) Haben wir $F(\tau) = w \sin \beta\tau$, so kommt im Falle des Kreisrohres[10])

$$\left.\begin{aligned} v_3 &= 2\,w\,\beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\, s_i)\, e^{-\tau s_i^2}}{s_i\,(\beta^2 + s_i^4)\, J_1(s_i)} \\ &+ 2\,w \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i\, J_0(\varrho\, s_i)}{(\beta^2 + s_i^4)\, J_1(s_i)}\cdot \sin\beta\tau - 2\,w\,\beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\, s_i)}{s_i\,(\beta^2 + s_i^4)\, J_1(s_i)}\cdot \cos\beta\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (45).$$

Dieser Ausdruck entspricht der Longitudinalschwingung einer Flüssigkeit im Kreisrohr bei periodischer Druckänderung, wenn für $t = 0$ Ruhe herrscht. Es ergibt sich daraus u. a., daß die Geschwindigkeitsänderung gegenüber der Druckänderung eine Phasenverschiebung zeigt, die sich mit wachsender Frequenz β vergrößert[11]).

6. Strömung in einem zylindrischen Rohr bei gegebener Anfangsverteilung der Geschwindigkeit und zeitlich veränderlichem Druck. Schließlich wollen wir noch den allgemeinsten Ausdruck für die Axialbewegung in einem Hohlzylinder angeben, wenn der Druck mit der Zeit sich ändert und die Anfangsverteilung der Geschwindigkeit $(v)_{\tau=0} = \Phi(\varrho)$ gegeben ist. Wenn wir die Gleichung in der Gestalt (35) annehmen, so läßt sich die Geschwindigkeit aus drei Teilen zusammensetzen:

$$v = \frac{2\,u}{\varepsilon}\left[1 - \varrho^2 - (1 - q^2)\frac{\lg\frac{1}{\varrho}}{\lg\frac{1}{q}}\right] + \sum_{i=1}^{\infty} A_i\, S_0(\varrho\, s_i)\, e^{-\tau s_i^2} + v_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

und die Koeffizienten A_i des zweiten Ausdrucks (als Lösung der homogenen, vom Druck unabhängigen Gleichung) können dadurch bestimmt werden, daß man das oben eingeführte Integrationsverfahren verwendet und die Orthogonalitätsbedingungen (11) der Besselschen Funktionen, sowie die Formeln (14) bis (16) berücksichtigt. Man erhält dann nach entsprechender Vereinfachung folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2\,u}{\varepsilon}\left[1 - \varrho^2 - (1 - q^2)\frac{\lg\frac{1}{\varrho}}{\lg\frac{1}{q}}\right] + \frac{\pi^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0^2(s_i)\, S_0(\varrho\, s_i)\, e^{-\tau s_i^2}}{J_0^2(q\, s_i) - J_0^2(s_i)} \int_q^1 \Phi(\varrho)\, S_0(\varrho\, s_i)\,\varrho\, d\varrho \\ &+ \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(s_i)\, S_0(\varrho\, s_i)\, e^{-\tau s_i^2}}{J_0(s_i) + J_0(q\, s_i)}\left[\int_0^{\tau} F(\tau)\, e^{\tau s_i^2}\, d\tau - \frac{8\,u}{\varepsilon\, s_i^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (47),$$

der für $b = 0$ übergeht in

$$v = 2\,u\,(1 - \varrho^2) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\, s_i)}{s_i^2\, J_1^2(s_i)} \int_0^1 \Phi(\varrho)\, J_0(\varrho\, s_i)\,\varrho\, d\varrho + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\varrho\, s_i)}{s_i\, J_1(s_i)}\left[\int_0^{\tau} F(\tau)\, e^{\tau s_i^2}\, d\tau - \frac{8\,u}{s_i^2}\right] \quad (48).$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Funktion $\Phi(\varrho)$ nach den Besselschen Funktionen $S_0(\varrho\, s_i)$, bzw. $J_0(\varrho\, s_i)$ entwickelbar ist. Die Anwendungen auf besondere Fragestellungen sind so mannigfaltig, daß sie einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben müssen. Ich hoffe im besonderen bei einer späteren Gelegenheit zu dem Fall der Schwingungsbewegung einen Beitrag liefern zu können. 568

[10]) Vgl. auch P. Szymanski: a. a. O., S. 94, wo der Fall nach einer anderen Methode behandelt ist.

[11]) Die Lösung ist inzwischen vom Verf. in der unter [8]) zitierten Arbeit zahlenmäßig ausgewertet und graphisch veranschaulicht worden.

Über das Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen.

Von *L. Collatz* in Karlsruhe.

Trotz der Erfolge, die das Differenzenverfahren bei Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen zu verzeichnen hat, ist es bisher nur wenig zur Behandlung von Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen verwendet worden.

Der Grund hierfür liegt wohl an einer namentlich bei Auftreten höherer partieller Ableitungen in der Differentialgleichung ungünstigen Fehlerfortpflanzung, die, wie das Beispiel einer Schwingungsdifferentialgleichung vierter Ordnung in **1** zeigt, das Verfahren vollkommen unbrauchbar machen kann, wenn es in der üblichen Weise verwendet wird, indem die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Die vorliegende Arbeit behandelt nun allgemein die Fehlerfortpflanzung und bringt insbesondere zwei neue Gesichtspunkte, die der Aufstellung von „brauchbaren" finiten Ausdrücken dienen sollen. Ein ausführliches numerisches Beispiel in **6** zeigt, daß das Differenzenverfahren bei Verwendung der auf diese Weise gefundenen finiten Ausdrücke an Stelle der Differenzenquotienten zufriedenstellende Resultate liefert.

1. Beispiel, daß das Differenzenverfahren in der gewöhnlich verwendeten Form unbrauchbar sein kann[1]. Es liege das Problem vor, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 f}{d y^2}=0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

unter den vorgegebenen Randbedingungen

$$f(0,y)=f(2,y)=\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(2,y)}{\partial x}=0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=0, \qquad f(x,0)=\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}x(2-x)=g(x) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

im Gebiet $0\leq x\leq 2$, $0\leq y$ zu lösen[2]. Physikalisch kann man $f(x,y)$ als die Ausbiegung der Stelle x eines transversal schwingenden Balkens der Länge 2 zur Zeit t (es ist t proportional y) deuten. Der Balken ist an beiden Enden eingespannt, zur Zeit $t=y=0$ gemäß der vorgegebenen ungefähr sinusförmig aussehenden Funktion $f(x,0)$ ausgebogen und wird dann sich selbst überlassen.

Wir gehen genau wie auch sonst beim gewöhnlichen Differenzenverfahren vor, legen ein rechteckiges Gitter zugrunde, das aus den Schnittpunkten der Geraden

$$x=\iota h, \quad y=\varkappa l, \quad (\iota,\varkappa=0,\pm 1,\pm 2\ldots) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

besteht, und suchen Näherungswerte $F_{\iota,\varkappa}$ für die Funktionswerte $f(\iota h,\varkappa l)$. Dazu ersetzen wir üblicherweise

$$\frac{\partial^2 f(\iota h,\varkappa l)}{\partial y^2} \quad \text{durch} \quad \frac{F_{\iota,\varkappa+1}-2F_{\iota,\varkappa}+F_{\iota,\varkappa-1}}{l^2}$$

und

$$\frac{\partial^4 f(\iota h,\varkappa l)}{\partial x^4} \quad \text{durch} \quad \frac{F_{\iota+2,\varkappa}-4F_{\iota+1,\varkappa}+6F_{\iota,\varkappa}-4F_{\iota-1,\varkappa}+F_{\iota-2,\varkappa}}{h^4}.$$

(1) entspricht dann die Differenzengleichung

$$\frac{F_{\iota,\varkappa+1}-2F_{\iota,\varkappa}+F_{\iota,\varkappa-1}}{l^2}+\frac{F_{\iota+2,\varkappa}-4F_{\iota+1,\varkappa}+6F_{\iota,\varkappa}-4F_{\iota-1,\varkappa}+F_{\iota-2,\varkappa}}{h^4}=0 \quad \ldots \quad (5).$$

[1] In den bisher bekannt gewordenen Fällen, in denen die Lösungen des Differenzenverfahrens nicht gegen die Lösung des Differentialgleichungs-Problems konvergieren (vgl. die Arbeit von R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy: „Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik", Math. Ann. 100 (1928), 32 bis 74, und L. Collatz: „Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differentialgleichungen", Schriften d. Math. Sem. u. d. Inst. f. ang. Math. Univ. Berlin, Bd. 3, 1 bis 34), lag die Nichtkonvergenz stets daran, daß die Zeit-Maschenweite, d. h. die Maschenweite in Fortpflanzungsrichtung, zu groß gewählt war, so daß man schneller vorwärtsging, als es dem Fortschreiten der Charakteristiken entsprach. Bei Verkleinern dieser Maschenweite trat wieder Konvergenz ein. In dem vorliegenden Beispiel jedoch liegt das Versagen des Differenzenverfahrens nicht daran, daß die Zeit-Maschenweite zu groß ist, sondern ist schon im Ersetzen der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten begründet.

[2] Die Differentialgleichung (1) ist wegen $\frac{d^4 g(0)}{d x^4}=\frac{d^4 g(2)}{d x^4}=0$ auch in den beiden Endpunkten erfüllt.

Wir setzen nun, genau so wie man es bei der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial y}$ zu tun pflegt[3]:

$$h^2 = l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Bei dem Ansatz (6) nimmt die Differenzengleichung (5) die Form an:

$$F_{\iota,\varkappa+1} = -F_{\iota+2,\varkappa} + 4F_{\iota+1,\varkappa} - 4F_{\iota,\varkappa} + 4F_{\iota-1,\varkappa} - F_{\iota-2,\varkappa} - F_{\iota,\varkappa-1} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Wählen wir als Maschenweite etwa $h = \frac{1}{4}$, so entspricht den Anfangsbedingungen (2)

$$F_{0,\varkappa} = 0; \qquad F_{-1,\varkappa} = F_{1,\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

(aus Symmetriegründen können wir uns auf das Gebiet $x \leq 1$ oder $\iota \leq 4$ beschränken) und (3) entspricht:

$$F_{\iota,0} = g(\iota \cdot h) = g\left(\frac{\iota}{4}\right), \qquad F_{\iota,1} = F_{\iota,-1} \qquad (\iota = 0, 1, 2, 3, 4), \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Für die erste Zeile ($y = l$) besagt (7)

$$F_{\iota,1} = F_{\iota,-1} = \frac{1}{2}\left(-F_{\iota+2,0} + 4F_{\iota+1,0} - 4F_{\iota,0} + 4F_{\iota-1,0} - F_{\iota-2,0}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

für die weiteren Zeilen ergeben sich nach (7) die Zahlen des folgenden Schemas:

Nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren berechnete Näherungswerte $F_{\iota,\varkappa}$

$\varkappa$	y	$\iota = -1$, $x = -\frac{1}{4}$	$\iota = 0$, $x = 0$	$\iota = 1$, $x = \frac{1}{4}$	$\iota = 2$, $x = \frac{1}{2}$	$\iota = 3$, $x = \frac{3}{4}$	$\iota = 4$, $x = 1$
0	0	0,039071735	0	0,039071735	0,118058158	0,187568754	0,214601837
1		0,044652602	0	0,044652602	0,109863744	0,176862238	0,203013184
2	0,125	0,000257993	0	0,000257993	0,125533042	0,134975166	0,168515843
3		0,321214435	0	0,321214435	− 0,239579119	0,324199479	− 0,048341312
4	0,25	− 2,888846123	0	− 2,888846123	3,462780402	− 3,228868720	3,097603475
5		31,203006508	0	+ 31,203006508	− 41,180005336	+ 44,950525752	− 45,098583152

Schon an diesen wenigen Zahlen erkennt man die völlige Unbrauchbarkeit des Verfahrens in der hier angewandten Form, da derart springende Zahlen nicht als geeignete Näherungen für die Ausbiegungsfunktion angesehen werden können. Es wurde mit so vielen Dezimalstellen gerechnet, damit nicht etwa das Anwachsen der Abrundungsfehler als Grund für die Unbrauchbarkeit angesehen werden kann, sondern nur die Formel (7), nach der gerechnet wurde.

In **6** soll gezeigt werden, daß dasselbe Beispiel bei Verwendung „besserer" Formeln als (7) eine brauchbare Durchrechnung zuläßt.

2. Allgemeinere Fälle, in denen das bisher verwendete Differenzenverfahren unbrauchbar ist. Die Formel (7) hat folgende zwei ungünstigen Eigenschaften:

1. Die $F_{\iota,\varkappa}$ haben dem Betrage nach große Koeffizienten im Vergleich zu dem Koeffizienten 1 des Gliedes $F_{\iota,\varkappa+1}$, das berechnet werden soll.

2. „Benachbarte" $F_{\iota,\varkappa}$-Werte werden mit verschiedenen Vorzeichen genommen.

Diese beiden Eigenschaften wirken zusammen dahin, daß die zu berechnende Größe $F_{\iota,\varkappa+1}$ als Differenz großer Zahlen erscheint. Wie stark auf diese Weise ein vorhandener Fehler ε anwachsen kann, zeigt sich deutlich aus der folgenden Fehlertabelle, in der zur Illustration einmal angenommen sei, es bestünde kein Verfahrenfehler und die Funktionswerte $F_{\iota,0}$, $F_{\iota,1}$ seien alle bis auf einen einzigen $F_{a,1}$ exakt richtig.

[3]) R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy a. a. O.[1]) S. 68.

Fehler der $F_{\iota,\varkappa}$-Werte

	$\iota = a$	$\iota = a+1$	$\iota = a+2$	$\iota = a+3$
$\varkappa = 1$	ε	0	0	0
$\varkappa = 2$	$-4\,\varepsilon$	$4\,\varepsilon$	$-\varepsilon$	0
$\varkappa = 3$	$49\,\varepsilon$	$-40\,\varepsilon$	$24\,\varepsilon$	$-8\,\varepsilon$
$\varkappa = 4$	$-560\,\varepsilon$	$496\,\varepsilon$	$-337\,\varepsilon$	$172\,\varepsilon$
$\varkappa = 5$	$6833\,\varepsilon$	$-6200\,\varepsilon$		

Bei den Zahlen der Tabelle in **1** ist nicht die Fortpflanzung der Abrundungsfehler, sondern die der Verfahrenfehler entscheidend. Die Abrundungsfehler könnte man durch Mitschleppen einer zu Anfang großen Stellenzahl klein halten, die Verfahrenfehler jedoch nur durch Verwendung besserer Formeln als (7).

Die gleichen Schwierigkeiten treten allgemein auf, wenn man Anfangswertprobleme bei partiellen Differerentialgleichungen höherer Ordnung nach dem Differenzenverfahren in der Weise behandelt, daß man Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, z. B.:

$$\frac{\partial^n f_{\iota,\varkappa}}{\partial y^n} \quad \text{durch} \quad \frac{F_{\iota,\varrho+n} - \binom{n}{1} F_{\iota,\varrho+n-1} + \binom{n}{2} F_{\iota,\varrho+n-2} - \cdots + (-1)^n F_{\iota,\varrho}}{l^n}$$

und die so entstehende Differenzengleichung nach dem Gliede $F_{\iota,\varrho+n}$ auflöst. (ϱ ist an sich willkürlich, wird aber gewöhnlich gleich $\varkappa$ oder $\left[\varkappa - \frac{n-1}{2}\right]$ gesetzt.) Auch wenn man die Differentialquotienten e i n z e l n durch höhere annähernde finite Ausdrücke ersetzt, also z. B.:

$$\frac{\partial f_{\iota,\varkappa}}{\partial y} \quad \text{durch} \quad \frac{-F_{\iota,\varkappa+2} + 8\,F_{\iota,\varkappa+1} - 8\,F_{\iota,\varkappa-1} + F_{\iota,\varkappa-2}}{12\,l},$$

bleiben dieselben Schwierigkeiten bestehen.

3. Zwei neue Gesichtspunkte bei der Aufstellung finiter Ausdrücke. Zur Aufstellung brauchbarer finiter Ausdrücke stehen zwei Auswege zur Verfügung.

A. Zur deutlicheren Fixierung der Vorstellung beschränken wir uns im folgenden auf lineare partielle Differentialgleichungen m-ter Ordnung bei 2 unabhängigen Variablen x, y:

$$L(f) = \sum_{\alpha+\beta \leq m} A_{\alpha,\beta}(x,y) \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = t(x,y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Es seien etwa auf der x-Achse die zur Eindeutigmachung von $f(x,y)$ nötigen Anfangsdaten vorgegeben, und es werden Näherungswerte $F_{\iota,\varkappa}$ der Lösungsfunktion $f(x,y)$ für $y > 0$ gesucht. Man pflegte bisher bei Zugrundelegung des rechteckigen Gitters (4) finite Gleichungen zu (11)

$$\sum_{\iota,\varkappa} C_{\iota,\varkappa} F_{\iota,\varkappa} = t_{\iota_0,\varkappa_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

aufzustellen, indem man

$$\sum_{\iota,\varkappa} C_{\iota,\varkappa} f_{\iota,\varkappa} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

nach dem T a y l o r schen Satz nach f und den Ableitungen von f an der Stelle $\iota_0, \varkappa_0$ entwickelte und die $C_{\iota,\varkappa}$ so bestimmte, daß (13) mit $L(f_{\iota_0,\varkappa_0})$ bis auf Glieder möglichst hoher Ordnung übereinstimmte. Die Ausdrücke (12) waren von der Form, daß ein $C_{\iota,\varkappa}$ mit dem größten $\varkappa$, etwa $C_{i,k}$ auftrat, und (12) wurde benutzt, um $F_{i,k}$ aus den $F_{\iota,\varkappa}$ mit $\varkappa < k$ zu berechnen. Dabei wurde der Punkt $\iota_0, \varkappa_0$ möglichst in die Mitte des „Sternes" gelegt, der von den in (12) auftretenden (von 0 verschiedenen) $C_{\iota,\varkappa}$ gebildet wurde; war $L(f)$ symmetrisch, so wurde stets auch der Stern der $C_{\iota,\varkappa}$ symmetrisch gewählt. Zur Erlangung brauchbarer finiter Ausdrücke ist es jedoch oft wesentlich, daß der Nullpunkt der Taylorentwicklung $\iota_0, \varkappa_0$ von der Mitte des Sternes verlagert wird nach der Fortpflanzungsstelle hin, d. h. in Richtung wachsender y.

Von wie entscheidendem Einfluß diese Verlagerung sein kann, zeigt **5**.

B. Man nehme außer den zur Übereinstimmung von $L(f_{\iota_0,\varkappa_0})$ mit den entsprechenden Gliedern der Taylorentwicklung von (13) benötigten $C_{\iota,\varkappa}$ noch weitere Punkte, also weitere zur Verfügung stehende Unbekannte $C_{\iota,\varkappa}$ hinzu, die nicht einer höheren Approximation dienen sollen, sondern einer Verkleinerung des „Index" des finiten Ausdruckes. Dabei verstehen wir unter dem Index J eines finiten Ausdruckes $C_{i,k} F_{i,k} + \sum\limits_{\varkappa<k} C_{\iota,\varkappa} F_{\iota,\varkappa}$, bei dem nach dem Gliede $F_{i,k}$ aufgelöst werden soll, den Ausdruck

$$J = \frac{1}{|C_{i,k}|} \cdot \sum_{\varkappa<k} |C_{\iota,\varkappa}| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Der Index eines Ausdruckes der Gestalt (13) wird also erhalten, indem man (12) nach dem Gliede mit dem größten $\varkappa$ auflöst:

$$F_{i,k} = -\frac{1}{C_{i,k}} \sum_{\varkappa<k} C_{\iota,\varkappa} F_{\iota,\varkappa} + \frac{1}{C_{i,k}} t_{\iota_0,\varkappa_0}$$

und die Summe der Beträge der Koeffizienten aller anderen $F_{\iota,\varkappa}$ bildet. Wir können die Ergebnisse von **1** dahin zusammenfassen: Das Differenzenverfahren versagte bei dem Beispiel in **1**, weil der Index des dort verwendeten finiten Ausdruckes (7) zu groß war. In **6** wird gezeigt werden, wie stark Zusatzglieder $C_{\iota,\varkappa}$ den Index herabdrücken können.

4. Fehlerbetrachtung. Stimmen in der Entwicklung von (13) nach dem Taylorschen Satz die Glieder mit denen von $L(f_{\iota_0,\varkappa_0})$ bis auf Glieder r-ter Ordnung (es sei $r \geqq m$) überein, so lassen sich die Restglieder unter der Voraussetzung, daß sämtliche $(r+1)$-ten partiellen Ableitungen von f in dem betrachteten Gebiet existieren und dem Betrage nach durch $f^{(r+1)}$ abgeschätzt werden können, zusammenfassen zu $\vartheta \cdot D \cdot l^{r-m+1} f^{(r+1)}$. Dabei ist $|\vartheta| \leqq 1$, D eine vom Gitter und vom Differentialausdruck L, aber nicht von f abhängende abschätzbare Größe, hängt also im allgemeinen von den Maschenweiten h und l ab, und zwar ist D in l ein Polynom von höchstens m-tem Grade: also

$$\sum_{\iota,\varkappa} C_{\iota,\varkappa} f_{\iota,\varkappa} = L(f_{\iota_0,\varkappa_0}) + \vartheta D l^{r-m+1} f^{(r+1)}.$$

Nach (12) gilt daher für den Fehler $\Psi_{\iota,\varkappa} = F_{\iota,\varkappa} - f_{\iota,\varkappa}$

$$\sum_{\iota,\varkappa} C_{\iota,\varkappa} \Psi_{\iota,\varkappa} = -\vartheta D l^{r-m+1} f^{(r+1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Da man auf der Anfangsgeraden $y=0$ alle gewünschten Ableitungen von f aus den gegebenen Anfangsdaten berechnen kann, kann man auf allen „Anfangsgeraden" $y=0$, $y=l, \ldots, y=(N-1)l$ (in dem finiten Ausdruck (12) mögen höchstens $N+1$ aufeinanderfolgende $\varkappa$ vorkommen) Näherungen $F_{\iota,\varkappa}$ berechnen nach

$$F_{\iota,\varkappa} = f_{\iota,0} + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{l^\nu \varkappa^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f_{\iota,0}}{\partial y^\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

so daß

$$|\Psi_{\iota,\varkappa}| \leqq \frac{l^{r+1} \varkappa^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)} \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varkappa \leqq N-1 \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Mit den Formeln (15) und (17) ist die Frage nach der Fehlerabschätzung im Prinzip erledigt.

Ist der Index $J \leqq 1$[4]), so kann man die Fehlerfunktion $\Psi_{\iota,\varkappa}$ im Falle $r > m$ explizit so abschätzen, daß die Konvergenz der Lösungen des Differenzenverfahrens gegen die Lösung der Anfangswertaufgabe evident ist. Wir geben eine Schrankenfolge $0 < Y_0 < Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_\varkappa < \ldots$ an mit $|\Psi_{\iota,\varkappa}| \leqq Y_\varkappa$: (man kann (12) durch $C_{i,k}$ durchdividieren, also $C_{i,k}=1$ erreichen)

$$Y_\varkappa \leqq \operatorname{Max}(Y_{\varkappa-1}, Y_{\varkappa-2}, \ldots, Y_{\varkappa-N}) + D l^{r-m+1} f^{(r+1)}.$$

[4]) Das ist z. B. der Fall, wenn man der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k \frac{\partial f}{\partial y}$ die finite Gleichung

$$\frac{F_{\iota+1,\varkappa} - 2F_{\iota,\varkappa} + F_{\iota-1,\varkappa}}{h^2} = k \frac{F_{\iota,\varkappa+1} - F_{\iota,\varkappa}}{l}$$

mit den Maschenweiten h, $l = {}^1/_2\, a k h^2$ gegenüberstellt, wo a eine beliebige Zahl aus dem Intervall $0 < a \leqq 1$ ist.

Dieser Forderung genügen wir in bekannter Weise durch[5])

$$Y_\varkappa = Y_{\varkappa-1} + D\, l^{r-m+1} f^{(r+1)}$$

oder

$$Y_\varkappa = Y_0 + \varkappa\, D\, l^{r-m+1} f^{(r+1)} .$$

Wählen wir als Y_0 das Maximum aller Ausdrücke (17), so folgt

$$Y_\varkappa \leq \frac{(N-1)^{r+1}\, l^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)} + \varkappa\, D\, l^{r-m+1} f^{(r+1)} .$$

An einer festen Bereichstelle x, y, $(y = \varkappa \cdot l = \text{const})$ geht die Fehlerschranke mit l gegen 0, wenn nur $r > m$ ist oder wenn im Falle $r = m$ das Polynom D die Maschenweite l als Faktor enthält. (Das ist z. B. stets der Fall, wenn in der betrachteten Differentialgleichung (11) die Funktion f undifferenziert nicht vorkommt, d. h. $A_{0,0} = 0$).

5. Anwendung des Gesichtspunktes A. Im folgenden will ich für einen einfachen Fall, in dem der Index $J > 1$ ist, den Weg zu einer expliziten Fehlerabschätzung andeuten. Zugleich soll dieser Fall den Einfluß des ersten Gesichtspunktes aus **3** illustrieren. Es werde die Gleichung

$$L(f(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - g(x,y) f = t(x,y)$$

bei konstantem c betrachtet. Als Maschenweite wählen wir h und $l = c\,h$. Wir suchen finite Ausdrücke höherer Annäherung, die in ihrer Taylorentwicklung bis auf Glieder 4. Ordnung einschließlich mit $L(f)$ übereinstimmen.

Je nachdem, ob man die Taylorentwicklung auf die Mitte des Sternes (den Punkt $\iota, \varkappa-2$) oder auf den Punkt $\iota, \varkappa-1$ oder auf die Spitze des Sternes, den Punkt $\iota, \varkappa$ bezieht, ergeben sich (zwangsläufig) die folgenden finiten Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} F_{\iota,\varkappa} = {} & 16\,F_{\iota,\varkappa-1} - 12\,h^2 g_{\iota,\varkappa-2} F_{\iota,\varkappa-2} + 16\,F_{\iota,\varkappa-3} - F_{\iota,\varkappa-4} \\ & + F_{\iota+2,\varkappa-2} - 16\,F_{\iota+1,\varkappa-2} - 16\,F_{\iota-1,\varkappa-2} + F_{\iota-2,\varkappa-2} - 12\,h^2 t_{\iota,\varkappa-2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} 11\,F_{\iota,\varkappa} = {} & (-12\,h^2 g_{\iota,\varkappa-1} - 4)\,F_{\iota,\varkappa-1} - 12\,F_{\iota,\varkappa-2} - 4\,F_{\iota,\varkappa-3} + F_{\iota,\varkappa-4} \\ & + 12\,(F_{\iota+1,\varkappa-1} + F_{\iota-1,\varkappa-1}) + 4\,(F_{\iota+1,\varkappa-2} + F_{\iota-1,\varkappa-2}) \\ & - (F_{\iota+2,\varkappa-2} + F_{\iota-2,\varkappa-2}) - 12\,h^2 t_{\iota,\varkappa-1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} & (35 + 12\,h^2 g_{\iota,\varkappa})\,F_{\iota,\varkappa} = 32\,F_{\iota,\varkappa-1} - 48\,F_{\iota,\varkappa-2} + 32\,F_{\iota,\varkappa-3} - 11\,F_{\iota,\varkappa-4} \\ & + 36\,(F_{\iota+1,\varkappa-1} + F_{\iota-1,\varkappa-1}) - 32\,(F_{\iota+1,\varkappa-2} + F_{\iota-1,\varkappa-2}) - (F_{\iota+2,\varkappa-2} + F_{\iota-2,\varkappa-2}) \\ & + 12\,(F_{\iota+1,\varkappa-3} + F_{\iota-1,\varkappa-3}) - 12\,h^2 t_{\iota,\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (20).$$

Diese drei Ausdrücke sind ohne die t-Glieder übersichtlicher in folgender Tabelle, deren Darstellungsweise wohl klar ist, zusammengestellt:

Ausdruck (18)					Ausdruck (19)					Ausdruck (20)				
		$\underline{-1}$					$\underline{-11}$					$\underline{-(35+12\,h^2 g_{\iota,\varkappa})}$		
		16				12	$\underline{-(4+12\,h^2 g_{\iota,\varkappa-1})}$	12			36	32	36	
1	-16	$\underline{-12\,h^2 g_{\iota,\varkappa-2}}$	-16	1	-1	4	-12	4	-1	-1	-32	-48	-32	-1
		$+16$					-4				12	32	12	
		-1					$+1$					-11		

Der Ausdruck (18) ist derselbe, den man erhält, wenn man $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ einzeln durch höher approximierende, nur die $F_{\iota,\varkappa}$ einer Geraden benutzenden Ausdrücke ersetzt und ist aus den in 2 angeführten Gründen unbrauchbar. Beim Übergang von (18) zu (19) wächst der Faktor des Gliedes $F_{\iota,\varkappa}$ im Vergleich zu den übrigen Faktoren stark an, der Index wird wesentlich kleiner. Allerdings muß man das „Brauchbarwerden" des finiten Ausdrucks mit einem Komplizierter-Werden, d. h. einer Vergrößerung der Rechenarbeit in Kauf nehmen.

[5]) Ähnlich wie bei R. v. Mises: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen, ZAMM 1930, S. 86 bis 88.

Wir skizzieren die Fehlerabschätzung im Falle $g_{\iota,\varkappa}\equiv 0$ für das Rechnen mit der finiten Gl. (20), die wir in der Gestalt schreiben

$$F_{i,k}=\sum_{\iota}\sum_{\varkappa=1}^{4}a_{\iota,\varkappa}^{(1)}F_{i-\iota,k-\varkappa}-\frac{12}{35}h^2 t_{i,k};$$

für die Lösungsfunktion $f(x,y)$ gilt

$$f_{i,k}=\sum_{\iota}\sum_{\varkappa=1}^{4}a_{\iota,\varkappa}^{(1)}f_{i-\iota,k-\varkappa}-\frac{12}{35}h^2 L(f_{i,k})-\lambda_{i,k};$$

das Restglied $\lambda_{i,k}$ kann dabei abgeschätzt werden durch

$$|\lambda_{i,k}|\leq\lambda=\frac{h^5 M_5}{90}(14+105\,c+380\,c^2+810\,c^3+970\,c^4+1789\,c^5),$$

wo M_5 der Maximalbetrag aller fünften partiellen Ableitungen von f im betrachteten Gebiet ist. Also gilt für den Fehler

$$\Psi_{i,k}=F_{i,k}-f_{i,k}=\sum_{\iota}\sum_{\varkappa=1}^{4}a_{\iota,\varkappa}^{(1)}\Psi_{i-\iota,k-\varkappa}+\lambda_{i,k};$$

drückt man in gleicher Weise die $\Psi_{\iota,k-1}$ durch $\Psi_{\iota,\varkappa}$ mit $k-5\leq\varkappa\leq k-2$ aus, so folgt

$$\Psi_{i,k}=\sum_{\iota}\sum_{\varkappa=1}^{4}a_{\iota,\varkappa}^{(2)}\Psi_{i-\iota,k-\varkappa-1}+\lambda_{i,k}+\sum_{\iota}a_{\iota,1}^{(1)}\lambda_{i-\iota,k-1}.$$

So fortfahrend erhält man

$$\Psi_{i,k}=\sum_{\iota}\sum_{\varkappa=1}^{4}a_{\iota,\varkappa}^{(k-3)}\Psi_{i-\iota,4-\varkappa}+\lambda_{i,k}+\sum_{\iota}\sum_{\nu=1}^{k-4}a_{\iota,1}^{(\nu)}\lambda_{i-\iota,k-\nu}\quad . \quad (21).$$

Während sich nun die $a_{\iota,\varkappa}^{(\nu)}$ in sehr unübersichtlicher Weise durch die Ausgangsgrößen, die $a_{\iota,\varkappa}^{(1)}$ ausdrücken, bestehen einfache Relationen für die Summen $a_{\varkappa}^{(\nu)}=\sum_{\iota}a_{\iota,\varkappa}^{(\nu)}$, und es kommt gerade auf diese Summen an, da sich bei gleichem Vorzeichen der $a_{\iota,\varkappa}^{(\nu)}$ (bei festem $\varkappa,\nu$ für verschiedene ι) nach (21) sofort die Abschätzung ergibt:

$$|\Psi_{i,k}|\leq\sum_{\varkappa=1}^{4}|a_{\varkappa}^{(k-3)}|\,\Psi_{4-\varkappa}+\lambda\Big(1+\sum_{\nu=1}^{k-4}|a_1^{(\nu)}|\Big)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22),$$

wobei $\Psi_{\varkappa}=\operatorname{Max}_{\iota}|\Psi_{\iota,\varkappa}|$ sei.

Entsprechend der Entstehung der $a_{\iota,\varkappa}^{(\nu)}$ gilt

$$a_{\varkappa}^{(\nu+1)}=a_{\varkappa+1}^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}a_{\varkappa}^{(1)}.$$

Es genügen alle $a_{\varkappa}^{(\nu)}$ (d. h. für $\varkappa=1,2,3,4$, es ist $a_5^{(\nu)}=0$ zu setzen) der totalen Differenzengleichung $z_\nu-\sum_{\varrho=1}^{4}a_{\varrho}^{(1)}z_{\nu-\varrho}=0$, für die man den Lösungsansatz $z_\nu=\zeta_\sigma^{\,\nu}$ durchführen kann, wo ζ_σ die Wurzeln der Gleichung $x^4-\sum_{\varrho=1}^{4}a_{\varrho}^{(1)}x^{4-\varrho}=0$ sind. Im vorliegenden Fall hat $35\,x^4-104\,x^3+114\,x^2-56\,x+11=0$ die Wurzeln $1;1;\frac{17\pm 4\,i\sqrt{3}}{35}$, so daß man alle $a_{\varkappa}^{(\nu)}$ durch $|a_{\varkappa}^{(\nu)}|\leq\text{Const.}\,\nu$ abschätzen kann. Aus (22) folgt daher

$$|\Psi_{i,k}|\leq\text{const}\,k\cdot\Psi+\text{const}\,k^2\cdot\lambda,$$

wo für den Anfangsfehler $\Psi=\operatorname{Max}(\Psi_0,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ nach (16) (17) $|\Psi|\leq\text{const}\cdot l^4$ erreicht werden kann. An einer festen Bereichstelle ($y=k\,l=\text{const}$) ist mithin $|\Psi_{i,k}|\leq\text{const}\cdot l^3$.

Für einige weitere Typen von Differentialgleichungen stellen wir in der folgenden Tabelle finite Ausdrücke höherer Approximation zusammen, die nach den in **3** aufgestellten Gesichtspunkten gefunden wurden (der Übersichtlichkeit halber sind an Stelle der Indizes i,k und $i-\iota$, $k-\varkappa$ die Indizes 0,0 und $-\iota$, $-\varkappa$ geschrieben; A,B,C,t sind Funktionen von x,y;

Tabelle: Einige finite Ausdrücke $\mathfrak{L}(F)$ höherer Annäherung.

$$L(f) = A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - B\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + Cf = t$$

$$\mathfrak{L}_{0,0}(F) = C_{0,0}F_{0,0} + \frac{B_{0,0}}{12\,l^2}[-35F_{0,0} + 104F_{0,-1} - 114F_{0,-2} + 56F_{0,-3} - 11F_{0,-4}]$$
$$+ \frac{A_{0,0}}{12\,h^2}[-72F_{0,-1} + 36(F_{1,-1} + F_{-1,-1}) + 66F_{0,-2} - 32(F_{1,-2} + F_{-1,-2})$$
$$-(F_{2,-2} + F_{-2,-2}) - 24F_{0,-3} + 12(F_{1,-3} + F_{-1,-3})] = t_{0,0}.$$

Restglied:

$$L(f) - \mathfrak{L}_{0,0}(f) = \frac{\vartheta f^{(5)}}{90}\left[|A|\left(14h^3 + 105h^2 l + 380hl^2 + 810l^3 + 970\frac{l^4}{h} + 1002\frac{l^5}{h^2}\right) + 1790|B|\cdot l^3\right]$$
$$\text{mit } |\vartheta| \leqq 1.$$

Für $A = B$ ein einfacherer Ausdruck mit einem um 1 niedrigeren Annäherungsgrad[6] $(h = l)$:

$$\mathfrak{L}^*_{0,0}(F) = C_{0,0}F_{0,0} + \frac{A_{0,0}}{2\,h^2}[-3F_{0,0} + 3(F_{1,-1} + F_{-1,-1}) - 2F_{0,-2} - (F_{1,-3} + F_{-1,-3})$$
$$+ F_{0,-4}] = t_{0,0}$$

$\mathfrak{L}^*_{0,0}(f) = L(f) +$ Restglied 4. Ordnung.

$$L(f) = A\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + Bf = t$$

$$\mathfrak{L}_{0,0}(F) = B_{0,0}F_{0,0} + \frac{A_{0,0}}{12\,h\,l}[35F_{0,0} - 52(F_{0,-1} + F_{-1,0}) + 72F_{-1,-1} + 21(F_{0,-2} + F_{-2,0})$$
$$-24(F_{-1,-2} + F_{-2,-1}) - 4(F_{0,-3} + F_{-3,0}) + 3F_{-2,-2}$$
$$+4(F_{-1,-3} + F_{-3,-1})] = t_{0,0},$$

$\mathfrak{L}_{0,0}(f) = L(f) +$ Restglied 5. Ordnung.

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - b\frac{\partial f}{\partial y} + Cf = t,$$ Maschenweiten l, h mit $2\cdot l = b\,h^2$; b sei eine Konstante.

$$12h^2\,\mathfrak{L}_{0,0}(F) = (-30 + 12h^2 C_{0,0})F_{0,0} + 16(F_{1,-1} + F_{-1,-1}) - (F_{2,-4} + F_{-2,-4}) = 12h^2\,t_{0,0}$$

$$\mathfrak{L}_{0,0}(f) = L(f) + \vartheta h^4 R \quad \text{mit } |\vartheta| \leqq 1;$$

R setzt sich aus Maximalbeträgen partieller Ableitungen von f zusammen (ist von h unabhängig).

---

6. Aufstellung eines „brauchbaren" finiten Ausdrucks für die Balkenschwingungsgleichung (Anwendung der Gesichtspunkte A und B). Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß unsere Methoden ausreichen, um das in **1** genannte Beispiel in Ordnung zu bringen. Zunächst brauchen wir einen geeigneten finiten Ausdruck $\Sigma C_{\iota,\varkappa} F_{\iota,\varkappa}$ für den Differentialausdruck (1). Wir bezeichnen die $C_{\iota,\varkappa}$ mit $a, b, c, d, e, \mathfrak{f}, g$ wie in der Darstellung:

$$\begin{array}{ccccc} & \times & a & \times & \\ \times & b & \times & b & \times \\ d & \times & c & \times & d \\ \times & e & \times & e & \times \\ g & \times & \mathfrak{f} & \times & g, \end{array}$$

wobei wir ausnutzen, daß die beiden Gitter (das Gitter, das die Punkte mit $a, b, c, d, e, \mathfrak{f}, g$ enthält und das Gitter, dessen Punkte durch Kreuze angedeutet sind) sich nicht beeinflussen, und wir so bei den Maschenweiten $2\cdot l = h^2$ zum Vordringen bis zu einer Stelle $y = y_s$ die gleiche Anzahl von Funktionswerten berechnen müssen wie in **1**. Dann ergeben sich für die $C_{\iota,\varkappa}$ bei einer Taylorentwicklung an der Stelle a die Gleichungen:

[6]) Der Ausdruck verwendet nur $F_{\iota,\varkappa}$, bei denen $\iota + \varkappa$ gerade ist. Das Gitter aller $\iota,\varkappa$-Punkte zerfällt dann in zwei sich nicht beeinflussende Gitter, und man kann die Rechnung für jedes Gitter getrennt durchführen; jedes Gitter für sich liefert einen Überblick über den Funktionsverlauf.

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Koeffizient von} & f: & a+2b+c+2d+2e+\mathfrak{f}+2g=0 \\
\text{„} \quad \text{„} & l f_y: & 2b+2c+4d+6e+4\mathfrak{f}+8g=0 \\
\text{„} \quad \text{„} & \frac{h^2}{2} f_{xx}: & 2b+8d+2e+8g=0 \\
\text{„} \quad \text{„} & \frac{l^2}{2} f_{yy}: & 2b+4c+8d+18e+16\mathfrak{f}+32g=\frac{2}{l^2} \\
\text{„} \quad \text{„} & \frac{h^2 l}{2} f_{xxy}: & 2b+16d+6e+32g=0 \\
\text{„} \quad \text{„} & \frac{h^4}{24} f_{xxxx}: & 2b+32d+2e+32g=\frac{24}{h^4}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (23).$$

Die Koeffizienten von $f_x, f_{xy}, f_{xxx}, f_{xyy}$ verschwinden wegen der symmetrischen Annahmen über $a, b, c, d, e, \mathfrak{f}, g$ von selbst. Es sind hier alle Glieder bis h^4 einschließlich aufgeschrieben. Diesen 6 Gleichungen könnte man auch ohne die Größe g genügen, es wird sich aber zeigen (als Anwendung des Gesichtspunktes B), daß g einen starken Einfluß auf den Index hat. Die Auflösung des Gleichungssystems (23) liefert als finite Gleichung für (1)

$$\left.\begin{array}{l}
(2-4G)(F_{\iota,\varkappa}-F_{\iota+1,\varkappa-1}-F_{\iota-1,\varkappa-1})+(2+2G)(F_{\iota,\varkappa-2}+F_{\iota,\varkappa-4})+(1-G)(F_{\iota+2,\varkappa-2} \\
\quad +F_{\iota-2,\varkappa-2})-(2+4G)(F_{\iota+1,\varkappa-3}+F_{\iota-1,\varkappa-3})+G(F_{\iota+2,\varkappa-4}+F_{\iota-2,\varkappa-4})=0
\end{array}\right\} \quad (24),$$

wo $G=4gl^2$ noch willkürlich ist. Den Index J als Funktion von G aufgetragen, veranschaulicht die Abb. 1. Für $G=0$ ist der Index $J=7$, während der kleinste Wert von J, der

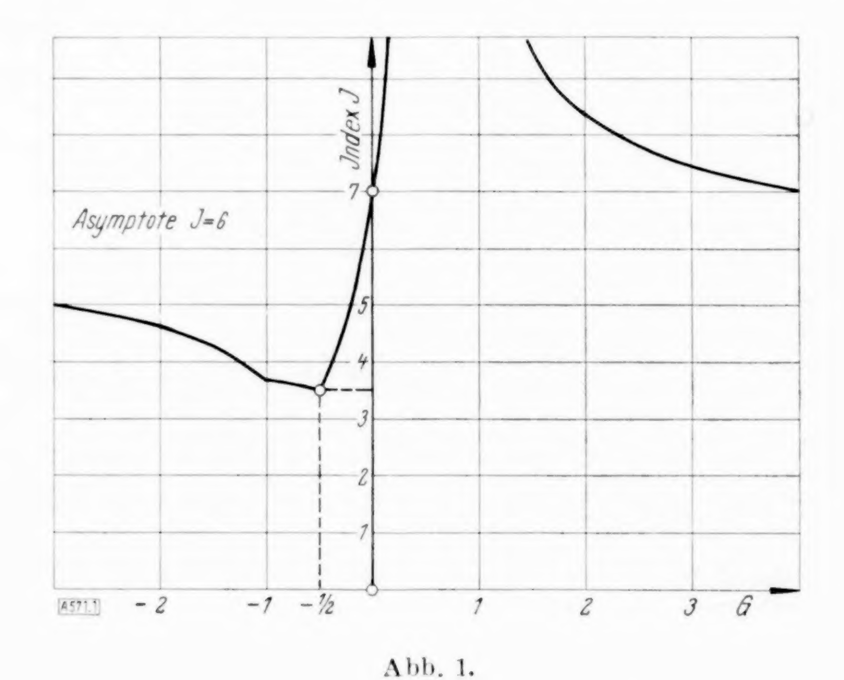


Abb. 1.

Wert 3,5 für $G=-\frac{1}{2}$ angenommen wird. Der finite Ausdruck wird also viel besser, wenn wir die Punkte mit g hinzunehmen. Das Beispiel von **1** ist im folgenden noch einmal mit dem finiten Ausdruck (24) für $G=-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}
8F_{\iota,\varkappa}-8(F_{\iota+1,\varkappa-1}+F_{\iota-1,\varkappa-1})+2F_{\iota,\varkappa-2}+3(F_{\iota+2,\varkappa-2}+F_{\iota-2,\varkappa-2})+2F_{\iota,\varkappa-4} \\
\quad -(F_{\iota+2,\varkappa-4}+F_{\iota-2,\varkappa-4})=0
\end{array}\right\} \quad . \quad (25)$$

durchgerechnet. Auf der Zeile $y=0$ sind die Werte $f_{\iota,0}=F_{\iota,0}$ nach (3) vorgegeben, (8) und (9) werden ohne Änderung übernommen. Bezeichnen wir die Werte von F auf den Geraden $y=0, l, 2l$ mit $A, B, C, D, \alpha, \beta$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & & & & & \\
 & \alpha & & \alpha & & \beta & & \beta \\
 & & 0 & & C & & D & \\
y=0 \;\text{———} & A & \text{—} & A & \text{———} & B & \text{———} & B \;\text{———}, \\
 & & 0 & & C & & D & \\
 & \alpha & & \alpha & & \beta & & \beta
\end{array}$$

so sind die Werte C, D auf den Geraden $y = \pm l$ nach dem gewöhnlichen Differenzenausdruck (5) für $l = \frac{1}{2} h^2$ gerechnet[7]); für die beiden zunächst noch unbekannten Werte α, β auf den Geraden $y = \pm 2l$ ergeben sich nach (25) zwei lineare Gleichungen:

$$8\alpha - 8C + 2A + 3(B + A) + 2\alpha - (\alpha + \beta) = 0$$

$$8\beta - 8(C + D) + 2B + 3(A + B) + 2\beta - (\alpha + \beta) = 0 .$$

Damit kennt man die $F_{\iota,\varkappa}$ auf den Zeilen $y = -l$, $y = 0$, $y = l$, $y = 2l$ und der Anwendung von (25) zur Berechnung von $F_{\iota,\varkappa}$ auf den weiteren Zeilen $y = 3l$, $y = 4l$, ... steht nichts mehr im Wege. So ergab sich das Schema der Näherungswerte F[8]):

Näherungen $F_{\iota,\varkappa}$, berechnet nach (25) für das Problem (1) (2) (3).

$\varkappa$	y	$\iota = -1$ $x = -\frac{1}{4}$	$\iota = 0$ $x = 0$	$\iota = 1$ $x = \frac{1}{4}$	$\iota = 2$ $x = \frac{1}{2}$	$\iota = 3$ $x = \frac{3}{4}$	$\iota = 4$ $x = 1$	Zeilen-summen $S_\varkappa$
0	0	0,03907		0,03907	0,11806	0,18757	(0,21460)	0,45328
1			0		0,11600		0,21170	0,44371
2		0,03870		0,03870		0,17837		0,43413
3			0		0,10614		0,19288	0,40516
4	0,125	0,03363		0,03363		0,15446		0,37618
5			0		0,08669		0,15718	0,33056
		0,02521		0,02521		0,11726		0,28493
			0		0,05943		0,10852	0,22738
	0,25	0,01481		0,01481		0,07011		0,16982
			0		0,02733		0,05089	0,10555
10		0,00330		0,00330		0,01735		0,04129
			0		— 0,00657		— 0,01080	— 0,02393
	0,375	— 0,00822		— 0,00822		— 0,03636		— 0,08915
			0		— 0,03936		— 0,07098	— 0,14969
		— 0,01883		— 0,01883		— 0,08629		— 0,21023
15			0		— 0,06837		— 0,12425	— 0,26099
	0,5	— 0,02776		— 0,02776		— 0,12811		— 0,31175
			0		— 0,09122		— 0,16598	— 0,34842
		— 0,03426		— 0,03426		— 0,15829		— 0,38510
			0		— 0,10594		— 0,19269	— 0,40457
20	0,625	— 0,03771		— 0,03771		— 0,17431		— 0,42405
			0		— 0,11122		— 0,20231	— 0,42475
		— 0,03779		— 0,03779		— 0,17494		— 0,42545
			0		— 0,10666		— 0,19419	— 0,40751
	0,75	— 0,03451		— 0,03451		— 0,16027		— 0,38957
25			0		— 0,09278		— 0,16923	— 0,35478

Die ersten Maxima der Ausbiegung ergeben sich somit zu

$$m_1 = F_{4,0} = 0{,}2146, \qquad m_2 \approx |F_{4,21}| = 0{,}2023, \qquad m_3 \approx F_{4,42} = 0{,}190 .$$

Wie auch sonst beim Differenzenverfahren erster Annäherung wird man an die hier erhaltenen Werte keine zu hohen Genauigkeitsansprüche stellen dürfen (man bedenke, daß in jeder Spalte der letzten Tabelle durchschnittlich nur 5 Zahlen zwischen Maximalwert und Nullage berechnet wurden, für genauere Werte müßte man kleinere Maschenweiten benutzen, beim Rechnen mit $h = \frac{1}{6}$ wird $|m_2| \approx 0{,}212$, das ist etwa 1% Fehler), sondern der Wert des Verfahrens wird in der Möglichkeit gesehen, mit recht geringer Rechenarbeit einen Überblick über den Verlauf der Lösungsfunktion zu gewinnen.

[7]) Dieser Ausdruck ist auf der Anfangsgeraden $y = l$ brauchbar wegen $F_{\iota,1} = F_{\iota,-1}$. Der Faktor des zu berechnenden Gliedes $F_{\iota,1}$ verdoppelt sich mithin (vgl. (10)), während diese Stärkung des Faktors des zu berechnenden Gliedes bei den folgenden Zeilen fortfallen würde und das gewöhnliche Differenzenverfahren also weiterhin nicht mehr brauchbar ist.

[8]) Das Bilden der Zeilensummen $S_\varkappa = \sum_{\nu=0}^{3} F_{2\nu+1,\varkappa}$ für gerades $\varkappa$, $S_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{3} F_{2\nu,\varkappa}$ für ungerades $\varkappa$ liefert eine wichtige Kontrolle: $S_{2\varkappa} + S_{2\varkappa+2} = 2 \cdot S_{2\varkappa+1}$ für alle $\varkappa$

Tabellen für Besselsche Funktionen erster und zweiter Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$.

Von *K. Karas* in Prag.

Anläßlich einer demnächst erscheinenden Untersuchung über die Eigenschwingungen inhomogener Saiten zeigte es sich, daß die strengen Lösungen, die sich in Besselschen Funktionen mit den Parametern $\nu = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$ darstellen ließen, mit anderweitig erhaltenen Näherungslösungen nicht befriedigend übereinstimmten und insbesondere bei einigen Fällen höhere Schwingungszahlen ergaben, als sie sich mittels des Ritzschen Verfahrens ermitteln ließen. Dies ließ sich darauf zurückführen, daß die bisher vorhandenen Tabellen 1. zu großen Argumentschritt aufweisen, 2. z. T. nicht genau genug, 3. z. T. fehlerhaft sind.

Während die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{1}{3}$ in dem Tafelwerk von G. N. Watson[1]) mit dem Argumentschritt 0,01 bis zum Argumentwert 16 bis zu 7 Stellen genau berechnet sind, liegen für die Besselschen Funktionen erster Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$ nur die 4-stelligen Tafeln von A. N. Dinnik[2]) mit dem Argumentschritt 0,2 bis zum Argumentwert 8 vor, während die Besselschen Funktionen zweiter Art überhaupt nicht berechnet sind.

In Zahlentafel 1 wurden daher die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{2}{3}$ für den Argumentschritt 0,1 bis zum Argumentwert 10 auf 5 Dezimalstellen genau durchweg neu berechnet und die Dinnikschen Werte bloß zur Kontrolle benutzt. Hierbei wurden die Reihen[3]):

$$J_\nu(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda} = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Pi(\nu)} \left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots\right\}$$

mit $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$, wobei Γ die Gammafunktion bedeutet, benutzt. Die Besselschen Funktionen zweiter Art wurden in üblicher Weise[4]) durch

$$Y_\nu(x) = \cot(\nu\pi)\,J_\nu(x) - \frac{1}{\sin(\nu\pi)}\,J_{-\nu}(x)$$

berechnet[5]). Die Ergebnisse wurden bezüglich $J_{\pm\frac{2}{3}}(x)$ durch Bildung der Differenzenstaffel bis zur 3. Ordnung, bezüglich $Y_{\pm\frac{2}{3}}(x)$ mittels der Relation

$$Y_{-\frac{2}{3}}(x) = \frac{1}{2}\left[J_{\frac{2}{3}}(x)\cdot\sqrt{3} - Y_{\frac{2}{3}}(x)\right]$$

kontrolliert[6]). Dabei zeigte es sich, daß die Dinnikschen Werte $F_{\frac{2}{3}}(x) = \Pi\left(\frac{2}{3}\right)\cdot J_{\frac{2}{3}}(x)$ für $x = 1{,}8$ und $F_{-\frac{2}{3}}(x) = \Pi\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot J_{-\frac{2}{3}}(x)$ für $x = 4{,}8$ unrichtig sind und durch 0,5431 (statt 0,5394) bzw. durch 0,3529 (statt 0,3560) ersetzt werden müssen. Zur Berechnung der Reihen wurden

[1]) G. N. Watson: A treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, insbesondere S. 714 bis 729.

[2]) A. N. Dinnik: Tafeln der Besselschen Funktionen $J_{\pm\frac{1}{3}}$ und $J_{\pm\frac{2}{3}}$, Archiv der Math. und Physik III, 18. Bd. (1911), S. 337 bis 338. — A. N. Dinnik: Über die Stabilität der flachen Form der Biegung (Über die Kipperscheinungen), Annalen des Donschen Polytechn. Institutes zu Nowotscherkask (1913). — A. N. Dinnik: Tafeln der Besselschen Funktionen $J_{\pm\frac{1}{4}}$ und $J_{\pm\frac{3}{4}}$, Archiv der Math. und Physik III, 21. Bd. (1913), S. 324 bis 326.

[3]) P. Schafheitlin: Die Theorie der Besselschen Funktionen, S. 11 Gl. (7), Leipzig und Berlin 1908. Es sei hier auch auf das demnächst im Verlage von B. G. Teubner erscheinende Buch: „Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen" von Prof. R. Weyrich, Brünn, verwiesen.

[4]) E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, S. 93, Leipzig und Berlin 1928.

[5]) Es möge bemerkt werden, daß die Besselschen Funktionen zweiter Art z. B. bei P. Schafheitlin a. a. O., S. 44, Gl. (4) mit entgegesetztem Vorzeichen eingeführt werden.

[6]) E. Jahnke und F. Emde: a. a. O., S. 93.

Zahlentafel 1.

Fünfstellige Besselsche Funktionen erster und zweiter Art für die Parameter $\pm \frac{2}{3}$ mit dem Argumentschritt 0,1 bis zum Argumentwert $x = 10$.

x	$J_{\frac{2}{3}}(x)$	$J_{-\frac{2}{3}}(x)$	$Y_{\frac{2}{3}}(x)$	$Y_{-\frac{2}{3}}(x)$	x	$J_{\frac{2}{3}}(x)$	$J_{-\frac{2}{3}}(x)$	$Y_{\frac{2}{3}}(x)$	$Y_{-\frac{2}{3}}(x)$
0	0	∞	$-\infty$	∞	5,0	— 0,35712	0,19246	— 0,01605	— 0,30125
0,1	0,15011	2,72981	— 3,23878	1,74939	5,1	— 0,35025	0,21928	— 0,05098	— 0,27783
0,2	0,23723	1,68082	— 2,07781	1,24435	5,2	— 0,34010	0,24344	— 0,08475	— 0,25216
0,3	0,30852	1,23374	— 1,60273	1,06855	5,3	— 0,32683	0,26477	— 0,11704	— 0,22452
0,4	0,36981	0,96247	— 1,32487	0,98270	5,4	— 0,31063	0,28312	— 0,14758	— 0,19522
0,5	0,42331	0,76835	— 1,13161	0,93240	5,5	— 0,29169	0,29838	— 0,17613	— 0,16455
0,6	0,47006	0,61555	— 0,98217	0,89817	5,6	— 0,27025	0,31045	— 0,20245	— 0,13282
0,7	0,51063	0,48786	— 0,85815	0,87129	5,7	— 0,24655	0,31928	— 0,22632	— 0,10036
0,8	0,54534	0,37691	— 0,75007	0,84731	5,8	— 0,22086	0,32483	— 0,24757	— 0,06748
0,9	0,57440	0,27799	— 0,65262	0,82376	5,9	— 0,19344	0,32711	— 0,26603	— 0,03451
1,0	0,59795	0,18834	— 0,56270	0,79919	6,0	— 0,16460	0,32616	— 0,28158	— 0,00176
1,1	0,61609	0,10626	— 0,47840	0,77275	6,1	— 0,13462	0,32202	— 0,29412	+ 0,03048
1,2	0,62892	+ 0,03070	— 0,39855	0,74394	6,2	— 0,10381	0,31481	— 0,30358	0,06189
1,3	0,63656	— 0,03901	— 0,32247	0,71251	6,3	— 0,07247	0,30462	— 0,30990	0,09219
1,4	0,63912	— 0,10327	— 0,24975	0,67837	6,4	— 0,04092	0,29161	— 0,31309	0,12111
1,5	0,63673	— 0,16233	— 0,18018	0,64151	6,5	— 0,00946	0,27594	— 0,31316	0,14839
1,6	0,62955	— 0,21630	— 0,11371	0,60206	6,6	+ 0,02162	0,25780	— 0,31016	0,17380
1,7	0,61777	— 0,26527	— 0,05036	0,56019	6,7	0,05202	0,23740	— 0,30416	0,19713
1,8	0,60159	— 0,30926	+ 0,00978	0,51611	6,8	0,08145	0,21498	— 0,29526	0,21817
1,9	0,58124	— 0,34828	0,06658	0,47008	6,9	0,10966	0,19077	— 0,28359	0,23676
2,0	0,55697	— 0,38232	0,11990	0,42240	7,0	0,13638	0,16503	— 0,26930	0,25276
2,1	0,52905	— 0,41138	0,16957	0,37339	7,1	0,16138	0,13804	— 0,25257	0,26604
2,2	0,49780	— 0,43548	0,21545	0,32338	7,2	0,18445	0,11006	— 0,23358	0,27653
2,3	0,46351	— 0,45464	0,25737	0,27273	7,3	0,20538	0,08139	— 0,21256	0,28414
2,4	0,42653	— 0,46892	0,29520	0,22179	7,4	0,22401	0,05231	— 0,18973	0,28886
2,5	0,38721	— 0,47837	0,32882	0,17092	7,5	0,24018	+ 0,02311	— 0,16535	0,29067
2,6	0,34591	— 0,48311	0,35813	0,12050	7,6	0,25377	— 0,00594	— 0,13966	0,28960
2,7	0,30300	— 0,48323	0,38305	0,07088	7,7	0,26469	— 0,03455	— 0,11292	0,28569
2,8	0,25886	— 0,47890	0,40354	+ 0,02241	7,8	0,27285	— 0,06245	— 0,08542	0,27901
2,9	0,21387	— 0,47029	0,41957	— 0,02457	7,9	0,27822	— 0,08937	— 0,05743	0,26966
3,0	0,16841	— 0,45760	0,43115	— 0,06973	8,0	0,28079	— 0,11508	— 0,02923	0,25778
3,1	0,12288	— 0,44104	0,43833	— 0,11275	8,1	0,28055	— 0,13934	— 0,00108	0,24350
3,2	0,07763	— 0,42087	0,44116	— 0,15335	8,2	0,27755	— 0,16192	+ 0,02673	0,22700
3,3	+ 0,03305	— 0,39737	0,43976	— 0,19126	8,3	0,27184	— 0,18263	0,05394	0,20845
3,4	— 0,01051	— 0,37081	0,43424	— 0,22622	8,4	0,26352	— 0,20129	0,08029	0,18807
3,5	— 0,05271	— 0,34151	0,42478	— 0,25804	8,5	0,25270	— 0,21775	0,10553	0,16608
3,6	— 0,09322	— 0,30980	0,41154	— 0,28650	8,6	0,23951	— 0,23186	0,12944	0,14270
3,7	— 0,13173	— 0,27600	0,39476	— 0,31146	8,7	0,22411	— 0,24351	0,15179	0,11819
3,8	— 0,16796	— 0,24048	0,37465	— 0,33279	8,8	0,20667	— 0,25263	0,17239	0,09279
3,9	— 0,20165	— 0,20358	0,35149	— 0,35037	8,9	0,18739	— 0,25916	0,19106	0,06676
4,0	— 0,23254	— 0,16566	0,32555	— 0,36416	9,0	0,16647	— 0,26304	0,20763	0,04035
4,1	— 0,26045	— 0,12709	0,29712	— 0,37411	9,1	0,14414	— 0,26429	0,22196	+ 0,01385
4,2	— 0,28517	— 0,08823	0,26652	— 0,38023	9,2	0,12062	— 0,26291	0,23394	— 0,01251
4,3	— 0,30658	— 0,04943	0,23408	— 0,38254	9,3	0,09617	— 0,25895	0,24348	— 0,03846
4,4	— 0,32453	— 0,01105	0,20013	— 0,38111	9,4	0,07103	— 0,25246	0,25051	— 0,06374
4,5	— 0,33895	+ 0,02658	0,16500	— 0,37604	9,5	0,04545	— 0,24355	0,25499	— 0,08813
4,6	— 0,34977	0,06312	0,12906	— 0,36744	9,6	+ 0,01969	— 0,23233	0,25690	— 0,11140
4,7	— 0,35698	0,09826	0,09264	— 0,35547	9,7	— 0,00600	— 0,21892	0,25625	— 0,13332
4,8	— 0,36057	0,13171	0,05609	— 0,34031	9,8	— 0,03136	— 0,20348	0,25307	— 0,15369
4,9	— 0,36060	0,16320	+ 0,01975	— 0,32216	9,9	— 0,05616	— 0,18619	0,24742	— 0,17234
					10,0	— 0,08015	— 0,16723	0,23937	— 0,18910

Zahlentafel 2.

Vierstellige Besselsche Funktionen erster und zweiter Art für die Parameter $\pm \frac{1}{4}$ mit dem Argumentschritt 0,1 bis zum Argumentwert $x = 8$.

x	$J_{\frac{1}{4}}(x)$	$J_{-\frac{1}{4}}(x)$	$Y_{\frac{1}{4}}(x)$	$Y_{-\frac{1}{4}}(x)$	x	$J_{\frac{1}{4}}(x)$	$J_{-\frac{1}{4}}(x)$	$Y_{\frac{1}{4}}(x)$	$Y_{-\frac{1}{4}}(x)$
0	0	∞	$-\infty$	$-\infty$	4,0	− 0,3748	− 0,3595	0,1336	− 0,1705
0,1	0,5207	1,7200	− 1,9117	− 0,9836	4,1	− 0,3816	− 0,3364	0,0941	− 0,2033
0,2	0,6155	1,4310	− 1,4082	− 0,5606	4,2	− 0,3845	− 0,3106	0,0548	− 0,2332
0,3	0,6743	1,2722	− 1,1249	− 0,3186	4,3	− 0,3836	− 0,2823	+ 0,0156	− 0,2602
0,4	0,7143	1,1560	− 0,9205	− 0,1458	4,4	− 0,3789	− 0,2519	− 0,0227	− 0,2839
0,5	0,7417	1,0596	− 0,7568	− 0,0107	4,5	− 0,3705	− 0,2197	− 0,0598	− 0,3043
0,6	0,7589	0,9737	− 0,6181	+ 0,0995	4,6	− 0,3587	− 0,1861	− 0,0955	− 0,3212
0,7	0,7677	0,8936	− 0,4960	0,1921	4,7	− 0,3436	− 0,1513	− 0,1296	− 0,3346
0,8	0,7690	0,8170	− 0,3864	0,2705	4,8	− 0,3255	− 0,1158	− 0,1617	− 0,3445
0,9	0,7637	0,7425	− 0,2864	0,3375	4,9	− 0,3046	− 0,0799	− 0,1916	− 0,3509
1,0	0,7522	0,6694	− 0,1945	0,3944	5,0	− 0,2810	− 0,0439	− 0,2189	− 0,3535
1,1	0,7352	0,5972	− 0,1094	0,4425	5,1	− 0,2551	− 0,0082	− 0,2435	− 0,3526
1,2	0,7129	0,5260	− 0,0310	0,4822	5,2	− 0,2272	+ 0,0269	− 0,2652	− 0,3482
1,3	0,6859	0,4556	+ 0,0416	0,5144	5,3	− 0,1976	0,0611	− 0,2840	− 0,3405
1,4	0,6545	0,3862	0,1083	0,5394	5,4	− 0,1666	0,0940	− 0,2995	− 0,3296
1,5	0,6192	0,3180	0,1695	0,5577	5,5	− 0,1345	0,1254	− 0,3118	− 0,3156
1,6	0,5803	0,2512	0,2251	0,5695	5,6	− 0,1017	0,1550	− 0,3209	− 0,2988
1,7	0,5383	0,1861	0,2751	0,5752	5,7	− 0,0684	0,1825	− 0,3265	− 0,2792
1,8	0,4937	0,1229	0,3199	0,5753	5,8	− 0,0351	0,2078	− 0,3290	− 0,2574
1,9	0,4467	0,0620	0,3590	0,5697	5,9	− 0,0020	0,2305	− 0,3280	− 0,2333
2,0	0,3978	+ 0,0036	0,3927	0,5590	6,0	+ 0,0306	0,2506	− 0,3238	− 0,2073
2,1	0,3475	− 0,0520	0,4210	0,5434	6,1	0,0623	0,2679	− 0,3166	− 0,1798
2,2	0,2962	− 0,1045	0,4440	0,5234	6,2	0,0929	0,2823	− 0,3063	− 0,1509
2,3	0,2443	− 0,1536	0,4615	0,4991	6,3	0,1221	0,2936	− 0,2931	− 0,1209
2,4	0,1923	− 0,1992	0,4740	0,4712	6,4	0,1497	0,3018	− 0,2771	− 0,0901
2,5	0,1406	− 0,2410	0,4814	0,4398	6,5	0,1753	0,3069	− 0,2587	− 0,0590
2,6	0,0895	− 0,2788	0,4838	0,4054	6,6	0,1988	0,3090	− 0,2382	− 0,0279
2,7	+ 0,0394	− 0,3124	0,4812	0,3681	6,7	0,2200	0,3079	− 0,2154	+ 0,0032
2,8	− 0,0092	− 0,3418	0,4742	0,3288	6,8	0,2387	0,3038	− 0,1909	0,0338
2,9	− 0,0560	− 0,3668	0,4627	0,2876	6,9	0,2548	0,2967	− 0,1648	0,0636
3,0	− 0,1006	− 0,3875	0,4474	0,2452	7,0	0,2681	0,2868	− 0,1375	0,0924
3,1	− 0,1429	− 0,4037	0,4280	0,2016	7,1	0,2785	0,2742	− 0,1093	0,1197
3,2	− 0,1824	− 0,4154	0,4051	0,1574	7,2	0,2861	0,2591	− 0,0803	0,1455
3,3	− 0,2189	− 0,4227	0,3789	0,1131	7,3	0,2907	0,2415	− 0,0508	0,1696
3,4	− 0,2521	− 0,4256	0,3498	0,0691	7,4	0,2925	0,2219	− 0,0213	0,1918
3,5	− 0,2819	− 0,4243	0,3182	+ 0,0256	7,5	0,2913	0,2003	+ 0,0080	0,2117
3,6	− 0,3081	− 0,4188	0,2842	− 0,0169	7,6	0,2873	0,1770	0,0370	0,2293
3,7	− 0,3306	− 0,4094	0,2484	− 0,0581	7,7	0,2805	0,1522	0,0653	0,2445
3,8	− 0,3493	− 0,3962	0,2110	− 0,0978	7,8	0,2711	0,1263	0,0925	0,2571
3,9	− 0,3640	− 0,3795	0,1727	− 0,1353	7,9	0,2591	0,0994	0,1185	0,2670
					8,0	0,2449	0,0719	0,1432	0,2744

Zahlentafel 3.

Vierstellige Besselsche Funktionen erster und zweiter Art für die Parameter $\pm \frac{3}{4}$ mit dem Argumentschritt 0,1 bis zum Argumentwert $x = 8$.

x	$J_{\frac{3}{4}}(x)$	$J_{-\frac{3}{4}}(x)$	$Y_{\frac{3}{4}}(x)$	$Y_{-\frac{3}{4}}(x)$	x	$J_{\frac{3}{4}}(x)$	$J_{-\frac{3}{4}}(x)$	$Y_{\frac{3}{4}}(x)$	$Y_{-\frac{3}{4}}(x)$
0	0	∞	−∞	∞	4,0	−0,1934	−0,1114	0,3509	−0,3849
0,1	0,1149	2,5824	−3,7670	2,7449	4,1	−0,2243	−0,0719	0,3260	−0,3891
0,2	0,1924	1,4892	−2,2984	1,7613	4,2	−0,2524	−0,0326	0,2985	−0,3895
0,3	0,2589	1,0423	−1,7329	1,4084	4,3	−0,2774	+0,0061	0,2688	−0,3862
0,4	0,3180	0,7770	−1,4168	1,2267	4,4	−0,2992	0,0438	0,2373	−0,3793
0,5	0,3711	0,5899	−1,2053	1,1147	4,5	−0,3176	0,0803	0,2040	−0,3689
0,6	0,4187	0,4442	−1,0469	1,0363	4,6	−0,3325	0,1152	0,1696	−0,3550
0,7	0,4612	0,3277	−0,9246	0,9799	4,7	−0,3439	0,1482	0,1343	−0,3381
0,8	0,4986	0,2194	−0,8089	0,9245	4,8	−0,3518	0,1791	0,0985	−0,3184
0,9	0,5311	0,1273	−0,7111	0,8784	4,9	−0,3561	0,2076	0,0625	−0,2960
1,0	0,5587	+0,0447	−0,6219	0,8348	5,0	−0,3569	0,2336	+0,0265	−0,2711
1,1	0,5812	−0,0302	−0,5385	0,7917	5,1	−0,3542	0,2567	−0,0088	−0,2442
1,2	0,5988	−0,0985	−0,4595	0,7483	5,2	−0,3482	0,2770	−0,0435	−0,2154
1,3	0,6115	−0,1607	−0,3842	0,7041	5,3	−0,3388	0,2941	−0,0771	−0,1850
1,4	0,6194	−0,2172	−0,3122	0,6588	5,4	−0,3264	0,3082	−0,1095	−0,1534
1,5	0,6224	−0,2684	−0,2428	0,6118	5,5	−0,3110	0,3189	−0,1400	−0,1209
1,6	0,6208	−0,3143	−0,1763	0,5636	5,6	−0,2929	0,3264	−0,1687	−0,0878
1,7	0,6145	−0,3550	−0,1125	0,5140	5,7	−0,2723	0,3306	−0,1952	−0,0545
1,8	0,6038	−0,3906	−0,0514	0,4633	5,8	−0,2493	0,3314	−0,2194	−0,0212
1,9	0,5888	−0,4211	+0,0067	0,4116	5,9	−0,2243	0,3290	−0,2410	+0,0118
2,0	0,5698	−0,4467	0,0619	0,3591	6,0	−0,1976	0,3234	−0,2598	0,0440
2,1	0,5469	−0,4672	0,1138	0,3062	6,1	−0,1693	0,3148	−0,2759	0,0754
2,2	0,5204	−0,4829	0,1625	0,2531	6,2	−0,1399	0,3033	−0,2890	0,1055
2,3	0,4906	−0,4936	0,2075	0,2002	6,3	−0,1096	0,2889	−0,2990	0,1339
2,4	0,4578	−0,4996	0,2487	0,1478	6,4	−0,0787	0,2720	−0,3060	0,1607
2,5	0,4223	−0,5008	0,2859	0,0964	6,5	−0,0475	0,2526	−0,3097	0,1854
2,6	0,3844	−0,4977	0,3195	+0,0459	6,6	−0,0163	0,2312	−0,3107	0,2081
2,7	0,3445	−0,4901	0,3486	−0,0029	6,7	+0,0145	0,2078	−0,3084	0,2283
2,8	0,3029	−0,4784	0,3737	−0,0500	6,8	0,0447	0,1827	−0,3031	0,2459
2,9	0,2600	−0,4628	0,3945	−0,0951	6,9	0,0741	0,1561	−0,2949	0,2609
3,0	0,2162	−0,4434	0,4109	−0,1376	7,0	0,1024	0,1284	−0,2840	0,2732
3,1	0,1719	−0,4204	0,4226	−0,1773	7,1	0,1293	0,0998	−0,2704	0,2827
3,2	0,1274	−0,3943	0,4302	−0,2141	7,2	0,1545	0,0707	−0,2545	0,2892
3,3	0,0830	−0,3656	0,4340	−0,2482	7,3	0,1778	0,0413	−0,2362	0,2927
3,4	+0,0391	−0,3343	0,4337	−0,2790	7,4	0,1990	+0,0118	−0,2157	0,2932
3,5	−0,0038	−0,3007	0,4291	−0,3061	7,5	0,2180	−0,0173	−0,1935	0,2910
3,6	−0,0455	−0,2651	0,4204	−0,3294	7,6	0,2347	−0,0459	−0,1698	0,2860
3,7	−0,0855	−0,2281	0,4081	−0,3490	7,7	0,2488	−0,0737	−0,1446	0,2782
3,8	−0,1238	−0,1899	0,3924	−0,3650	7,8	0,2602	−0,1004	−0,1182	0,2676
3,9	−0,1598	−0,1509	0,3732	−0,3769	7,9	0,2689	−0,1257	−0,0911	0,2546
					8,0	0,2749	−0,1496	−0,0633	0,2392

die Potenztafeln in K. Hayashi[7]) und die fünfstellige Tafel für $x^{\frac{2}{3}}$ von J. Kuno[8]) benutzt. Bezüglich weiterer eventueller Unterteilung des Tafelschrittes sei auf die wertvollen Arbeiten von F. Emde[9]) verwiesen.

In der Zahlentafel 2 wurden die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{1}{4}$, in Zahlentafel 3 mit den Parametern $\nu = \pm \frac{3}{4}$ z. T. aus der oben angegebenen Reihe, z. T. aus den Dinnikschen Werten durch Interpolation[10]) für den Argumentschritt 0,1 bis zum Argumentwert 8 auf 4 Dezimalen berechnet. Die Besselschen Funktionen erster Art wurden dann wieder durch Bildung der Differenzenstaffel bis zur 3. Ordnung, die zweiter Art durch die Relationen

$$Y_{-\frac{1}{4}}(x) = \left[J_{\frac{1}{4}}(x) + Y_{\frac{1}{4}}(x)\right]\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad Y_{-\frac{3}{4}}(x) = \left[J_{\frac{3}{4}}(x) - Y_{\frac{3}{4}}(x)\right]\frac{\sqrt{2}}{2}$$

kontrolliert. Hierbei zeigte es sich, daß neben anderen kleinern Abweichungen um eine Einheit der letzten Stelle sämtliche Dinniksche Werte für $x = 5{,}4$ und insbesondere für $x = 4{,}8$, letztere ziemlich beträchtlich, von den wahren Werten abweichen. Eine weitere Kontrolle, wenigstens bis zur 3. Dezimale, kann bezüglich $J_{\pm\frac{1}{4}}(x)$ aus den Reihen $D(x)$ bzw. $G(x)$ der Dissertation von L. Prandtl[11]) errechnet werden[12]).

Bei Berechnung der Zahlentafeln wurde der Verfasser durch Frau J. Karas weitgehend unterstützt. 572

---

[7]) K. Hayashi: Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin 1930, insbesondere Tafel XXXVII, S. 166 bis 169. Diese Tafel sollte bis einschließlich x^6 ungekürzt wiedergegeben werden, da sonst der relative Fehler zu groß ist, was die Brauchbarkeit der Tafel herabsetzt. Bei x^8 sollte außerdem für $x = 4{,}1$ richtig 79849,25229 (statt 78949,25229) stehen.

[8]) J. Kuno: Tech. Rep. of the Kyushu Imp. Univ. I, Fukuoka 1926, abgedruckt bei K. Hayashi a. a. O., S. 106 bis 110 als Tafel XXXVIII. Für $x = 1{,}3$ sollte es dort richtig 1,19114 (statt 1,19103), für $x = 5{,}7$ richtig 3,19092 (statt 3,19030), für $x = 6{,}1$ richtig 3,33851 (statt 3,32861) heißen.

[9]) F. Emde: Unterteilung des Tafelschritts („Untertafelung" — „Briggs-Moutonsche Aufgabe"), ZAMM, Bd. 14 (1934), S. 333 bis 339. — F. Emde: Fortlaufende Rechnungen auf der Rechenmaschine. In dieser Arbeit finden sich unter F wertvolle Hinweise zur Berechnung der Reihen und unter G solche zur Bildung der Tafeldifferenzen unter günstiger Ausnutzung der Rechenmaschine. Elektrotechn. Institut, Stuttgart. Diese Arbeit wurde dem Verfasser freundlicherweise von Herrn Prof. P. Funk, Prag, zur Verfügung gestellt. Sie ist derzeit noch nicht im Druck erschienen.

[10]) B. Sporer: Niedere Analysis, S. 74 bis 76, Leipzig 1903.

[11]) L. Prandtl: Kipp-Erscheinungen, Inaug.-Diss. München (1899) S. 25. Man vgl. auch E. Jahnke und F. Emde: Funktionentafeln a. a. O., S. 91, 92, 104 und Tafel I, S. 106.

[12]) Man vgl. auch das „Verzeichnis berechneter Funktionentafeln", herausgegeben vom Institut für angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin 1928, insbesondere S. 13, Nr. 46 und 48.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. PAUL **WERNERS,** Energie-Übertragung und -Umwandlung mit Wechselstrom. 204 S. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 18 M.

Es ist ein uraltes Bestreben der Wissenschaft, die Naturerscheinungen und Gesetze möglichst alle, zum mindesten aber die Gesetze gleicher oder ähnlicher Gruppen auf eine gemeinsame Grundformel zurückzuführen. Solange die Entwicklung und Erforschung noch rasch fortschreitet, wird man sich mit einer mehr geschichtlich gegebenen Darstellung begnügen. Sobald aber einmal ein gewisser Abschluß gefunden ist, werden Wissenschaftler und Techniker von einer höheren Warte aus rückschauend versuchen, das Grundproblem eines größeren zusammenhängenden Gebietes der Wissenschaft und Technik aus der Fülle der Einzelerscheinungen herauszuarbeiten.

So hat es der Verfasser unternommen, die Gesetze der Erzeugung, Umwandlung und Übertragung elektrischer Energie mittels Wechselstrom auf eine allen gemeinsame Schaltungsart und Grundformel zu bringen, die Betriebseigenschaften daraus abzuleiten und damit eine einheitliche Theorie der Leitungen, Transformatoren und Maschinen zu schaffen. Fernleitung und Maschinen erhalten auf diese Weise im wesentlichen die aus Wechselstromwiderständen gebildete T-Schaltung als Ersatzschaltbild zugeordnet.

Die Lösung dieser Aufgabe stellt hohe Anforderungen an das mathematische Rüstzeug und wird erreicht durch die symbolische Betrachtungsweise, d. h. durch das Rechnen mit komplexen Größen, die von Fall zu Fall durch das Vektor-Diagramm unterstützt werden. Die Darstellung ist klar und übersichtlich. Das Verständnis des schwierigen Stoffes wird erleichtert durch die am Anfang gegebene Darstellung der einschlägigen mathematischen Hilfsmittel.

Das Buch wendet sich wohl in erster Linie an den wissenschaftlich geschulten Pionier der Elektrotechnik. Es ist aber auch geeignet, den jungen Studierenden in die wissenschaftlichen Aufgaben seines elektrotechnischen Fachgebietes einzuführen und ihm das nötige wissenschaftliche Rüstzeug zu vermitteln. Als Beispiele sind Probleme der Starkstromtechnik gewählt. Doch werden auch der Schwachstrom- und Hochspannungstechniker an dem Buch nicht vorübergehen können, da besonders die ersten Kapitel schon tief in die Theorie der Leitungen hineinführen. Auch der Mathematiker wird manche Anregung daraus entnehmen können, wie seine Vorlesungen über das Rechnen mit komplexen Größen durch praktische Beispiele für den jungen Studierenden nicht nur anregend, sondern auch überzeugend für die Notwendigkeit einer fleißigen Beschäftigung mit diesem Zweig der Mathematik gestaltet werden können.

Druck und Ausstattung verdienen hervorgehoben zu werden.

Freiberg/Sa. W. Krug VDE. 574

Dr. phil. LUDWIG **HÄNERT,** Marine-Studienrat in Mürwik, Geschütz und Schuß. Einführung in die Geschützmechanik und Ballistik. 2., verb. Aufl. VI + 370 S. m. 161 Textabb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis geb. 27 M.

Der Inhalt der vorliegenden Auflage stimmt im großen ganzen mit der in dieser Zeitschrift 9 (1929) S. 253 von Popoff besprochenen, ersten Auflage überein, hat aber in Einzelheiten eine starke Überarbeitung erfahren. Dabei ist natürlich der Charakter des Buches der gleiche geblieben. Es ist eine verhältnismäßig leicht verständliche Einführung in das Gebiet der Geschützmechanik und der Ballistik, die an mathematischen und physikalischen Kenntnissen etwa das voraussetzt, was eine gute höhere Schule vermittelt. Heute ist ein derartiges Buch unentbehrlich; vor allem in der Hand des jungen Offiziers wird es gute Dienste leisten. Darüber hinaus möchte man es aber auch in den Händen unserer heranwachsenden Ingenieure sehen, die so verhältnismäßig bequem mit den wissenschaftlichen Grundlagen der Wehrtechnik bekannt werden könnten. Auswahl des Stoffes und Darstellung sind sehr geschickt, nur wäre vor allem bei der Darbietung der mathematischen und physikalischen Grundlagen eine etwas schärfere Fassung erwünscht. Doch das sind Kleinigkeiten, die der Verfasser bei einer Neuauflage, die hoffentlich im Interesse einer möglichst weiten Verbreitung wehrwissenschaftlicher Kenntnisse recht bald nötig ist, sicher leicht beseitigen wird.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 577

Prof. Dr. HEINRICH **REICHEL,** Graz, Die wichtigsten mathematischen Methoden bei der Bearbeitung von Versuchsergebnissen und Beobachtungen. 88 S. m. 30 Abb. Berlin-Wien 1935, Verlag Urban & Schwarzenberg.

Die vorliegende Einführung in die statistischen Methoden, ein Sonderdruck aus Abderhaldens Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. V, Teil 10, ist von einem Biologen für Biologen geschrieben. Er beabsichtigt damit nicht nur die richtigen Verfahrungsweisen an der Hand von Formeln und Rechenanweisungen zu lehren, sondern auch „die Ableitung dieser Regeln aus verständlichen Voraussetzungen klar oder doch glaubhaft zu machen“. Behandelt werden: die normale Häufigkeitsverteilung, einiges aus der Fehlerrechnung, die Annäherung von Messungen, die von einer Veränderlichen abhängen, durch die nach der Methode der kleinsten Quadrate beste Gerade und der Korrelationskoeffizient. An einer größeren Anzahl von Beispielen wird die Anwendung der Formeln und Rechenmethoden erläutert. Nicht überall steht leider der Verf. so über der Sache, daß er sie einwandfrei darstellen könnte. Neben schwerfälligen Ableitungen finden sich auch hier und da Unrichtigkeiten: so, wenn Verf. behauptet, daß durch drei Punkte eine Kurve „zweiten Grades (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel oder ähnliche Kurve (!))“ bestimmt sei, oder wenn er sagt: „Die Neigung $\operatorname{tg} \alpha$ der Geraden im log-arithmetisch geteilten Feld bedeutet nichts anderes, als die Krümmung der Kurve im numerischen Feld“ usw. Auch die Ableitung des Fehlers des Korrelationskoeffizienten ist nicht einwandfrei. Sie führt auch auf einen anderen Wert als auf den, den man gewöhnlich unter Annahme einer zweidimensionalen Gaußschen Verteilung ableitet.

Der Verfasser dürfte also mit dieser Darstellung nicht durchaus seinen Zweck erreichen, doch wird der Praktiker daraus an Hand der gegebenen Beispiele die richtige Verwendung der wichtigsten Methoden zur Bearbeitung von Versuchsergebnissen erlernen können.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 589

O. **SCHREIER** und E. **SPERNER,** Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. I. Bd. 238 S. (1931). Geb. 9,60 M.; II. Bd. 308 S. (1935). Geb. 9,60 M. (Hamburger Einzelschriften Bd. 10 und 19.) Verlag B. G. Teubner.

In klarer lesbarer Form liegt hier die denkbar solideste Grundlage moderner analytischer Geometrie vor, die, der heutigen Entwicklung dieser Disziplin entsprechend, eng mit der Algebra verknüpft ist. Freilich werden nicht, wie in manchen beliebten Lehrbüchern vorwiegend einschmeichelnde Beispiele geboten, hinter denen sich dann bisweilen unzweckmäßige Begriffe und fadenscheinige Beweise oder nur schwer streng beweisbare anschauliche Theoreme verbergen. Bewährte und vernünftige Begriffe werden an die Spitze gestellt, und mit ihnen wird die Theorie systematisch aufgebaut. Beispiele sind vielfach in den Übungsaufgaben untergebracht. Bei aller Strenge ist die Theorie im Hinblick auf die mannigfachen Anwendungen gearbeitet. — Wer das Buch als Lehrbuch durcharbeitet, gewinnt nicht nur, was die Kapitelüberschriften ankündigen: affiner Raum, lineare Gleichungen; euklidischer Raum, Determinantentheorie; Körpertheorie, Fundamentalsatz der Algebra; Gruppentheorie; lineare Transformationen, Matrizen; projektive Geometrie —, sondern besitzt darüber hinaus z. B. die orthogonalen Transformationen und die metrische Geometrie, die projektive, affine und metrische Klassifizierung der Flächen zweiten Grades, die Elementarteilertheorie (in besonders einfacher und durchsichtiger Darstellung), und er hat nur einen leichten Schritt zu tun, um die nichteuklidische Geometrie und die geometrischen Grundlagen der analytischen Mechanik und der Relativitätstheorie u. a. verstehen zu lernen. — Begriffsbildungen und Sätze der analytischen Geometrie gewinnen bekanntlich erst dann ihren höchsten Grad von Einfachheit und Übersichtlichkeit, wenn sie in einer der Verallgemeinerung auf n Dimensionen fähigen Weise formuliert werden. Dieser Höchstgrad wird überall im Buche erreicht, wie überhaupt die Beweisführung mit Vorteil so gestaltet ist, daß sie auf die allgemeinsten Fälle anwendbar bleibt, in denen die Sätze noch gelten. Nirgends aber wird einem Verallgemeinerungswahnsinn gefrönt, der die allgemeinsten Fälle auch da ausspinnt, wo sie überhaupt kein oder doch für den Leserkreis des Buches kein Interesse mehr haben; der dargebotene Stoff ist im Gegenteil weise begrenzt.

Dresden. Threlfall. 607

Handbuch der Vermessungskunde von weil. Dr. phil. h. c. W. Jordan, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Hannover, fortgesetzt von weil. Dr. C. Reinhertz, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Hannover. I. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 8., erweit. Aufl., bearb. von Dr.-Ing. e. h. O. Eggert, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Berlin. VIII + 632 (24) S. m. zahlreichen Abb. Stuttgart 1935, J. B. Metzlersche Verlagsbuchh. Preis geb. 30 M.

Neben dem bekannten Buch von F. R. Helmert über die Ausgleichungsrechnung kann man das von W. Jordan begründete, von C. Reinhertz fortgesetzte und von O. Eggert weitergeführte Werk als das beachtenswerteste bezeichnen; eine Neuauflage bedeutet deshalb immer in den in Frage kommenden Kreisen ein Ereignis. Das vorliegende Buch ist zunächst für den Geodäten bestimmt; es bietet aber auch anderen Fachleuten, die sich mit der Ausgleichung von Beobachtungen beschäftigen, viel Wertvolles. Dies gilt insbesondere von dem ersten und dem letzten Kapitel.

Das erste, mit „allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme" überschriebene Kapitel enthält alles, was theoretisch und praktisch notwendig ist zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, nach bedingten Beobachtungen und nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Mit Rücksicht auf die Bestimmung des Buches wird die „Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit" in dem für die Ausgleichungsrechnung erforderlichen Umfang erst im letzten Kapitel behandelt. Das zweite Kapitel enthält die Ausgleichung der „Triangulierungsnetze" oder die Ausgleichung von Punktbestimmungen nach bedingten Beobachtungen. Das gegenüber der letzten Auflage erweiterte dritte Kapitel umfaßt die „Punktbestimmung durch Koordinatenausgleichung" oder die Ausgleichung von Punktbestimmungen nach vermittelnden Beobachtungen; die Erweiterungen beziehen sich insbesondere auf die zur Beurteilung der Genauigkeit einer Punktbestimmung wichtige mittlere Fehlerellipse. Das vierte Kapitel enthält neben Angaben über die Bestimmung der Genauigkeit von Triangulierungen insbesondere geschichtliche Mitteilungen über ausgeführte Triangulierungen.

In einem Anhang sind einige bei der Durchführung von bestimmten Aufgaben der Ausgleichungsrechnung verwendbare Tafeln beigefügt. Ein alphabetisches Sachverzeichnis erleichtert die Benutzung des Buches.

Dresden. P. Werkmeister. 597

Dr.-Ing. M. **EWEIS**, Reibungs- und Undichtigkeitsverluste an Kolbenringen. (Forschungsheft 371, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausg. B. Bd. 6, März/April 1935.) 23 S. m. 37 Abb. und 3 Zahlentafeln. Berlin 1935, VDI-Verlag m. b. H. Preis 5 M.

Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gesetzt, über diesen für alle Kolbenmaschinen so wesentlichen Maschinenteil durch Rechnung und Versuch Klarheit zu schaffen.

Die Forderung geringer Undichtigkeitsverluste bringt für die Kolbenringe zumeist zwangsläufig das Auftreten größerer Reibungsverluste mit sich. Seit Jahren kann man daher im Kolbenmaschinenbau ein Suchen nach dem Bestwert beider Verluste durch Wahl verschiedener Formen und Kolbenringzahlen beobachten.

Ausgehend von einer zusammenfassenden mathematischen Behandlung der Reibung und der Druckverteilung unter den Ringen sowie des Druckverlustes hinter den Ringen in Abhängigkeit von der Drehzahl werden Beziehungen abgeleitet für verschiedene Strömungsarten der Gase durch die einzelnen Ringstufen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich dann ein mathematischer Ansatz für die Berechnung der Undichtigkeitsverluste bei pulsierender Strömung.

In einer besonderen Reibungsmeßmaschine, bei der der Kolben mit den an den Ringen eingebauten Meßgeräten gegenüber einem bewegten Zylinder ruhend aufgehängt ist, werden die Rechnungen durch Messungen bei wechselnden äußeren Bedingungen der Ringzahlen, der Drehzahlen und der Drucke nachgeprüft. Neben einer Druckmessung hinter den einzelnen Ringen mit Hilfe des Farnboro-Indikators gelangt zur Bestimmung der Reibungskräfte ein piezo-elektrischer Quarz-Indikator zur Verwendung.

Als Ergebnis der Messungen wurden Werte für die Reibungskräfte und für den Druckverlauf auch bei Einstellung verschiedener Schmierzustände gewonnen. Wenn auch diese Ergebnisse wegen der geringen Höchstdrehzahl der Versuchsanlage streng nur für das Gebiet der halbflüssigen Reibung gelten, so sind sie doch als Anhalt für die Vorausberechnung und Planung bei Neuentwürfen von Kolbenmaschinen bereits eine sehr wertvolle Unterlage.

Berlin. O. Holfelder VDI. 608

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. HARRY **SCHMIDT,** Prof. a. d. Staatl. Hochschule f. angew. Technik Köthen, nicht-planm. a. o. Prof. a. d. Univ. Leipzig, Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. V/125 S. mit 20 Abb. Leipzig 1935, Verlagsbuchh. Dr. Max Jänecke. Preis brosch. 5,80 M.

Grimsehls Lehrbuch der Physik. Neubearbeitet von Prof. Dr. R. Tomaschek, Direktor des Physikalischen Instituts der Techn. Hochschule Dresden. Zweiter Band, Zweiter Teil: Materie und Äther. 7. Aufl. VII/430 S. mit 314 Abb. Leipzig und Berlin 1936, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 14 M.

Dr. W. **LIETZMANN,** Oberstudiendirektor in Göttingen, Dr. J. **JAROSCH,** Direktor der Bundesrealschule in Wien, Geometrie und geometrisches Zeichnen für die III. und IV. Klasse der Realgymnasien, Realschulen und Frauenoberschulen. 94 S. 4. Aufl. Leipzig und Wien 1935, Verlag Franz Deuticke. Preis 3 M.

Geh. Rat Prof. Dr. PHILIPP **LENARD,** Heidelberg, Große Naturforscher in Lebensbeschreibungen. 324 S. mit 67 Bildn. München 1929, J. F. Lehmanns Verlag. Preis geb. 10,80 M.

Dr. phil. L. C. **DUE,** Die Brückenverbindungstheorie und ihre Anwendung zur Klasseneinteilung und Klassenzusammensetzung quadratischer Irrationalzahlen und binärer quadratischer Formen. 39 S. Kopenhagen 1936, Verlag Levin & Munksgaard. Preis 4,50 Kr.

M. **VON LAUE** und R. **VON MISES,** Stereoskopbilder von Kristallgittern. Teil II. 56 S. mit 24 Tafeln. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis in Mappe 18 RM.

Prof. Dr. A. **THUM** VDI und Dr.-Ing. K. **OESER,** Gummifederungen für ortfeste Maschinen. (Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt, herausgegeb. von Prof. Dr. A. Thum VDI.) V/72 S. mit 52 Abb. und 7 Zahlentaf. Berlin 1935, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 6,50 M.

Prof. Dr. A. **THUM** VDI und Dr.-Ing. F. **DEBUS** VDI, Vorspannung und Dauerhaltbarkeit von Schraubenverbindungen. (Mitteilungen der Materialprüfungsanstalt an der Technischen Hochschule Darmstadt, herausgegeb. von Prof. Dr. A. Thum VDI.) VIII/72 S. mit 90 Abb. und 8 Zahlentafeln. Berlin 1936, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 6,50 M.

NACHRICHTEN

74. Hauptversammlung und 80-Jahrfeier des Vereins Deutscher Ingenieure.

In Verbindung mit der Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Darmstadt beging der Verein Deutscher Ingenieure auf seiner 74. Hauptversammlung die Feier seines 80jährigen Bestehens. Über 4500 Ingenieure und frühere Schüler der Technischen Hochschule Darmstadt nahmen an der Feier teil, die am 26. Mai mit der Hauptversammlung des VDI begann, am 27. mit den Fachvorträgen aus den Einzelgebieten der Technik fortgesetzt wurde, und die ihren Höhepunkt in einer gemeinsamen Feierstunde fand, die der Feier des 100jährigen Bestehens der Technischen Hochschule und des 80-jährigen Bestehens des Vereins gewidmet war. — Ein Sommerfest im Hofe des Schlosses ließ die süddeutsche Gastlichkeit gebührend zur Geltung kommen. Mit Ausflügen und Besichtigungsfahrten am 29. Mai fand die Tagung ihren Abschluß.

90 Jahre Akademischer Verein Hütte.

Am 16. Mai feierte der Akademische Verein Hütte sein 90jähriges Bestehen. Er wurde im Jahre 1846 von Studierenden des damaligen Königlichen Gewerbe-Instituts, aus der die Technische Hochschule Berlin hervorgegangen ist, gegründet. Aus diesem Kreise stammte die Anregung zur Gründung des Vereins Deutscher Ingenieure, der auf dem zehnten Stiftungsfest der „Hütte" ins Leben gerufen wurde. Der Verein hat sich in den 90 Jahren seines Bestehens mannigfachen Aufgaben aus dem Interessenkreis der Ingenieure gewidmet; am bekanntesten ist die im Jahre 1856 erfolgte Schaffung des Taschenbuches, das heute in 26. Auflage vorliegt. Dieses dem Ingenieur unentbehrliche Werk ist ein schönes Zeugnis für die unermüdliche Energie, mit der der Verein jederzeit der Allgemeinheit zu dienen bestrebt ist.

Preisausschreiben für den Max-Eyth-Preis.

Anläßlich des 100. Geburtstages von Max Eyth hat die Max-Eyth-Gesellschaft in Verbindung mit dem Verein Deutscher Ingenieure ein Preisausschreiben erlassen. Der Max-Eyth-Preis in Höhe von 1000 RM. wird alljährlich am 6. Mai, dem Geburtstage Max Eyths, verliehen, erstmalig am 6. Mai 1937.

Die Bewerber haben jeweils bis zum 31. Dezember an die Geschäftsstelle des Vereins Deutscher Ingenieure, Berlin NW 7, Hermann-Göring-Str. 27, eine Arbeit einzureichen, deren Umfang bis zu 5 Schreibmaschinenseiten (Format DIN A 4, 30 Zeilen) betragen soll. Der Aufsatz soll in allgemeinverständlicher, fesselnder Form und in Prosa einen Stoff aus dem Gebiet der Technik behandeln, wobei Arbeiten, die sich mit dem Wirken der Technik in der Landwirtschaft befassen, besonders erwünscht sind.

Das Preisgericht setzt sich zusammen aus je einem Vertreter des Vereins Deutscher Ingenieure, der Max-Eyth-Gesellschaft, der Technisch-Literarischen Gesellschaft und der Reichsschrifttumskammer.

Näheres siehe in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure Bd. 80 (1936) Nr. 20, S. 612.

Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung.

Auf Veranlassung des Reichsministers für Luftfahrt, Generaloberst Göring, ist die Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung gegründet worden. Die neue Gesellschaft wird sich den Forschungsaufgaben widmen, die bisher der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) und der Vereinigung für Luftfahrtforschung oblagen. Die Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt, die in diesem Jahr auf eine 25jährige erfolgreiche Arbeit zurückblicken konnte, wird sich auflösen. Ihr bisheriger Präsident, Prof. Dr. Schütte, und Herr Oberstleutnant a. D. Wagenführ sind zu Ehrenmitgliedern der neuen Gesellschaft ernannt worden. Zu Präsidenten der Lilienthal-Gesellschaft sind Prof. Carl Bosch-Heidelberg und Prof. L. Prandtl-Göttingen, und als geschäftsführender Präsident Ministerialrat Baeumker ernannt worden.

Der 12. Deutsche Physiker- und Mathematikertag findet vom 13. bis 19. September d. J. in Bad Salzbrunn statt.

Veranstaltungen des Mathematischen Reichsverbandes 1936.

I. Im Anschluß an die Tagung der Mathematiker und Physiker in Bad Salzbrunn am Freitag, den 18. 9.

A. 9 Uhr: Geschäftssitzung.

B. 9½ Uhr: Allgemeine Sitzung. Thema: Ausbildung der zukünftigen Lehrer der Mathematik an den höheren Schulen, unter besonderer Berücksichtigung der Angewandten Mathematik. Berichter die Herren Dreetz und Zabel.

C. 8 Uhr abends: Zusammenkunft und freie Aussprache der Beiräte des M. R.

II. Vor der Naturforscherversammlung in Dresden am Sonnabend, den 19. 9., zusammen mit der Dresdener Ortsgruppe des Fördervereins und der Abteilung XV für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

D. Nachmittags 5 Uhr: Herr Salkowski: „Was kann der geometrische Unterricht für die Ausbildung der Raumanschauung tun?"

E. Abends 8 Uhr: Zusammenkunft und freie Aussprache der Beiräte des M. R.

An allen Veranstaltungen können Gäste teilnehmen.

Der Vorsitzende des Arbeitsausschusses des M. R. Prof. Dr. Hamel.

Die 94. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte

findet vom 20. bis 23. September in Dresden statt.

Vorläufiges Programm der Tagung:

Sonnabend, 19. September: 20 Uhr: Abendvortrag.

Sonntag, 20. September: 9.30 Uhr: Sitzung des wissenschaftlichen Ausschusses. 12.15 Uhr: Enthüllung einer Carus-Gedenktafel am Carushaus. 16.30 Uhr: Eröffnungssitzung. 19 Uhr: Abendvortrag. 20.15 Uhr: Begrüßungsabend.

Montag, 21. September: 9 Uhr: Erste allgemeine Sitzung. 15 Uhr: Sitzung der medizinischen Hauptgruppe. 20 Uhr: Abendvortrag.

Dienstag, 22. September: 9 Uhr: Sitzung der naturwissenschaftlichen Hauptgruppe. 15 Uhr: Kombinierte Sitzung der Abteilungen. 20 Uhr: Vorstellung in der Staatsoper und Abendvortrag.

Mittwoch, 23. September: 8.15 Uhr: Geschäftssitzung der Gesellschaft. 9 Uhr: Kombinierte Sitzung der Abteilungen. 15 Uhr: Zweite allgemeine Sitzung. Schlußansprache. 20 Uhr: Vorstellung im Staatlichen Schauspielhaus und Abendvortrag.

Der Preis der Teilnehmerkarte beträgt: für Altmitglieder der Gesellschaft 10 M., für neubeitretende Mitglieder 15 M., für Nichtmitglieder 20 M., für Angehörige 10 M. Teilnehmer an den Tagungen der Fachvereinigungen, die an der Tagung der Gesellschaft nicht teilnehmen, können eine Sondertagungs-Teilnehmerkarte zum Preise von 3 M. lösen, die die Vergünstigungen gewährt, die die Teilnehmer am Naturforscher- und Ärztetag genießen (z. B. ermäßigte Eisenbahnfahrt zwischen Do. 17. 9. und Sbd. 26. 9.).

Die Geschäftsstelle der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Dresden-A. 16, Elisenstr. 4, versendet auf Wunsch kostenlos Einladungen und Programm der Tagung, aus dem Näheres zu ersehen ist.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Die Hauptversammlung der GAMM findet von Donnerstag, 24. 9., bis Sonnabend, 26. 9., im Anschluß an die Tagung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Dresden statt. (Tagungsort: Technische Hochschule, Bismarckplatz 18.) Zur Tagung sind bis jetzt die folgenden Vorträge angemeldet worden:

1. R. Beyer, Zwickau: Schmiegungskegelschnitte und ihre Anwendung in der praktischen Analysis und Kinematik.
2. R. Gran Olsson, Trondheim: Thema vorbehalten.
3. Henschke, Berlin: Über Strahlgebläse mit hohem Wirkungsgrad, insbesondere zur Tunnellüftung.
4. Kinner, Göttingen: Die tragende Fläche von Kreisform.
5. K. Ludwig, Hannover: Über Träger mit Eigengewicht und gleichem Widerstand gegen Biegung.
6. K. Marguerre, Berlin-Adlershof: Über die Tragfähigkeit eines Plattenstreifens, der über die Ausbeulungsgrenze auf Druck belastet ist.
7. v. Ohnesorge, Berlin: Untersuchungen über Tropfenbildung, Strahlzerfall und Zerstäubung (mit Zeitdehneraufnahmen).
8. Th. Pöschl, Karlsruhe: Die Blasiusschen Formeln und der Mittelpunkt eines Profils.
9. L. Prandtl, Göttingen: Bemerkungen zur Theorie der tragenden Fläche.
10. E. Schapitz, Berlin-Adlershof: Über einige Probleme der versteiften Schale im Flugzeugbau.
11. H. Schlichting, Friedrichshafen: Tragflügeltheorie bei Überschallgeschwindigkeit.
12. H. Schmidt, Köthen: Strenge Lösungen der Prandtlschen Theorie der tragenden Linie.
13. E. Seidl, Berlin: Betrachtung bleibender Formänderungen auf Grund der Arbeitshypothesen „Formungsprinzip" und „Individualprinzip".
14. E. Sörensen, Dresden: Erzwungene und freie Schwingungen elastischer Systeme.
15. W. Tollmien, Göttingen: Zum Übergang von Unterschall- in Überschall-Strömungen.
16. E. Trefftz, Dresden: Über die Berechnung der Zirkulationsverteilung bei der geraden, tragenden Linie.
17. Umpfenbach, Berlin: Kalorimetrisches Verfahren zur Wirkungsgradbestimmung bei Wasserturbinen.
18. G. Vogelpohl, Berlin: Fortschritte in der Strömungsuntersuchung mit dem Ultramikroskop.
19. G. Vogelpohl, Berlin: Hydrodynamische Lagertheorie und halbflüssige Reibung.
20. C. Weber, Dresden: Streifen mit Eigenlast.
21. G. Weinblum, Berlin: Theorie der aktiven Schlingertanks.
22. F. Weinig, Berlin-Adlershof: Betrachtung zur räumlichen Strömung um den Tragflügel.

Etwaige weitere Vortragsanmeldungen werden umgehend an den Unterzeichneten erbeten.

Ein besonderer Versammlungsbeitrag wird von der GAMM nicht erhoben, doch wird auch den Teilnehmern der GAMM-Tagung, die am Naturforscher- und Ärztetag nicht teilnehmen, empfohlen, eine Sondertagungs-Teilnehmerkarte der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zum Preise von 3 M. zu lösen, wofür, von anderen Vergünstigungen (verbilligte Eisenbahnfahrt usw.) abgesehen, die Unterkunftsvermittlung übernommen wird. Diese Sondertagungs-Teilnehmerkarte ist bei der Geschäftsstelle der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Dresden-A. 16, Elisenstr. 4 (Prof. Dr. R. Zaunick) anzufordern.

Prof. Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 20, Cäcilienstr. 6.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 20, Cäcilienstr. 6. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.